

PERSAMAAN DIFERENSIAL

Kuliah

METODE NUMERIK

TKS 12408

Wahyu Widiyanto

Jurusan Teknik Sipil UNSOED

Pengertian

- Persamaan diferensial : persamaan yang mengandung turunan fungsi.
- Banyak permasalahan dalam bidang ilmu pengetahuan dan teknik yang dapat diformulasikan ke dalam bentuk persamaan diferensial.
- Contoh kasus : persamaan lendutan balok, teori getaran, profil muka air sungai, perubahan garis pantai, gaya gelombang pada anjungan lepas pantai, dsb.

JENIS PERSAMAAN DIFERENSIAL

1. Persamaan diferensial biasa : jika mengandung 1 variabel bebas.
2. Persamaan diferensial parsial : jika mengandung lebih dari 1 variabel bebas.

1 $\rightarrow$ ODE : Ordinary Differential Equation

2 $\rightarrow$ PDE : Partial Differential Equation

ORDER PERSAMAAN DIFERENSIAL

- Order PD ditentukan oleh order/derajat tertinggi dari turunannya.

- Contoh order 1 :

$$x \frac{dy}{dx} + y = 3$$

- Contoh order 2 :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

- Contoh PD Parsiil :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

PENYELESAIAN PD

- Penyelesaian persamaan diferensial adalah suatu fungsi yang memenuhi PD dan juga kondisi awal yang diberikan pada persamaan tersebut.
- Jika tidak diberikan kondisi awal maka penyelesaian yang diperoleh adalah penyelesaian umum.
- Untuk mendapatkan penyelesaian tunggal perlu informasi tambahan misalnya nilai $y(x)$ dan/atau turunannya pada nilai x tertentu.

Contoh Penyelesaian PD

- Misal PD order 1 :

$$\frac{dy}{dx} = y$$

- Penyelesaiannya :

$$y = Ce^x$$

- Untuk mendapatkan penyelesaian tunggal perlu informasi tambahan, misal kondisi awal yaitu di $x = 0$ nilai $y = 1$ atau

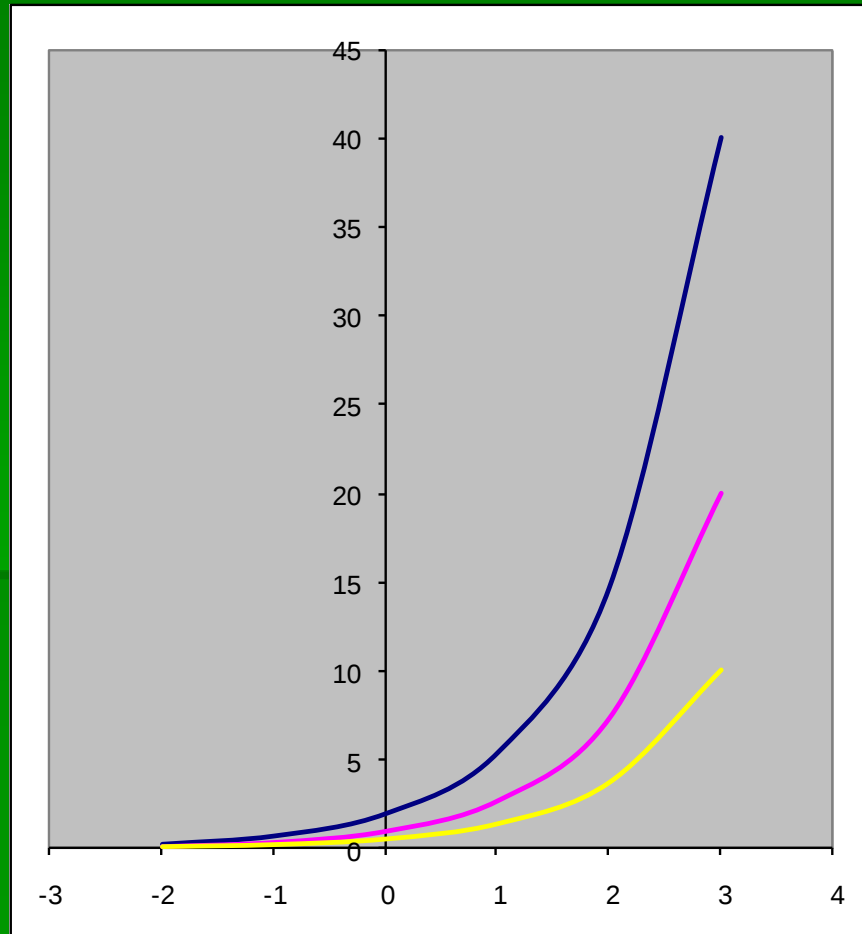
$$y(x=0) = 1$$

- Diperoleh penyelesaian tunggal :

$$y = e^x$$

Penyelesaian dari

$$\frac{dy}{dx} = y$$



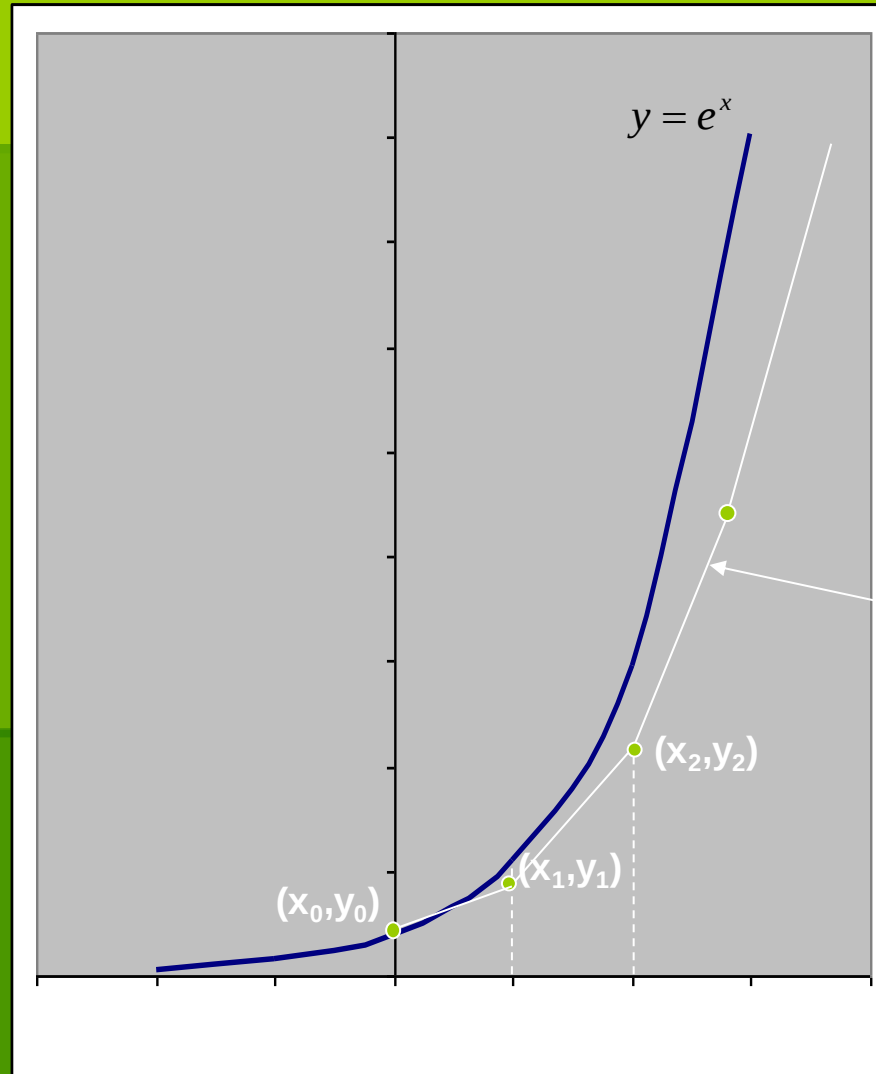
PENYELESAIAN NUMERIK PD

- PD tidak selalu dapat atau mudah diselesaikan secara analitis.
- Bentuk-bentuk PD yang tidak dapat diselesaikan secara analitis dapat diselesaikan dengan metode numerik.
- Penyelesaian dengan metode numerik dilakukan pada titik-titik yang ditentukan secara berurutan. Untuk mendapatkan hasil yang lebih teliti maka jarak (interval) antara titik-titik yang berurutan tersebut dibuat semakin kecil.

URUTAN PENYELESAIAN PD DENGAN METODE NUMERIK

- Hitungan dimulai dari nilai awal yang diketahui, misalnya di titik (x_0, y_0)
- Dihitung kemiringan kurva (garis singgung) di titik tersebut.
- Berdasar nilai y_0 di titik x_0 dan kemiringan fungsi di titik-titik tersebut dihitung nilai y_1 di titik x_1 yang berjarak Δx dari x_0 .
- Selanjutnya titik (x_1, y_1) yang telah diperoleh tersebut digunakan untuk menghitung nilai y_2 di titik x_2 yang berjarak Δx dari titik x_1 .
- Prosedur hitungan tersebut diulangi untuk mendapatkan y selanjutnya.

Tampilan grafis penyelesaian numerik



Penyelesaian numerik

METODE-METODE PENYELESAIAN PD SECARA NUMERIK

1. Metode Euler
2. Metode Heun
3. Metode Poligon (Euler yang dimodifikasi)
4. Metode Runge-Kutta (order 1, 2, 3 & 4)

Metode Satu Langkah

- Akan dicari secara berurutan suatu nilai dari nilai yang telah diperoleh sebelumnya.

$$y_{i+1} = y_i + \Phi \Delta x$$

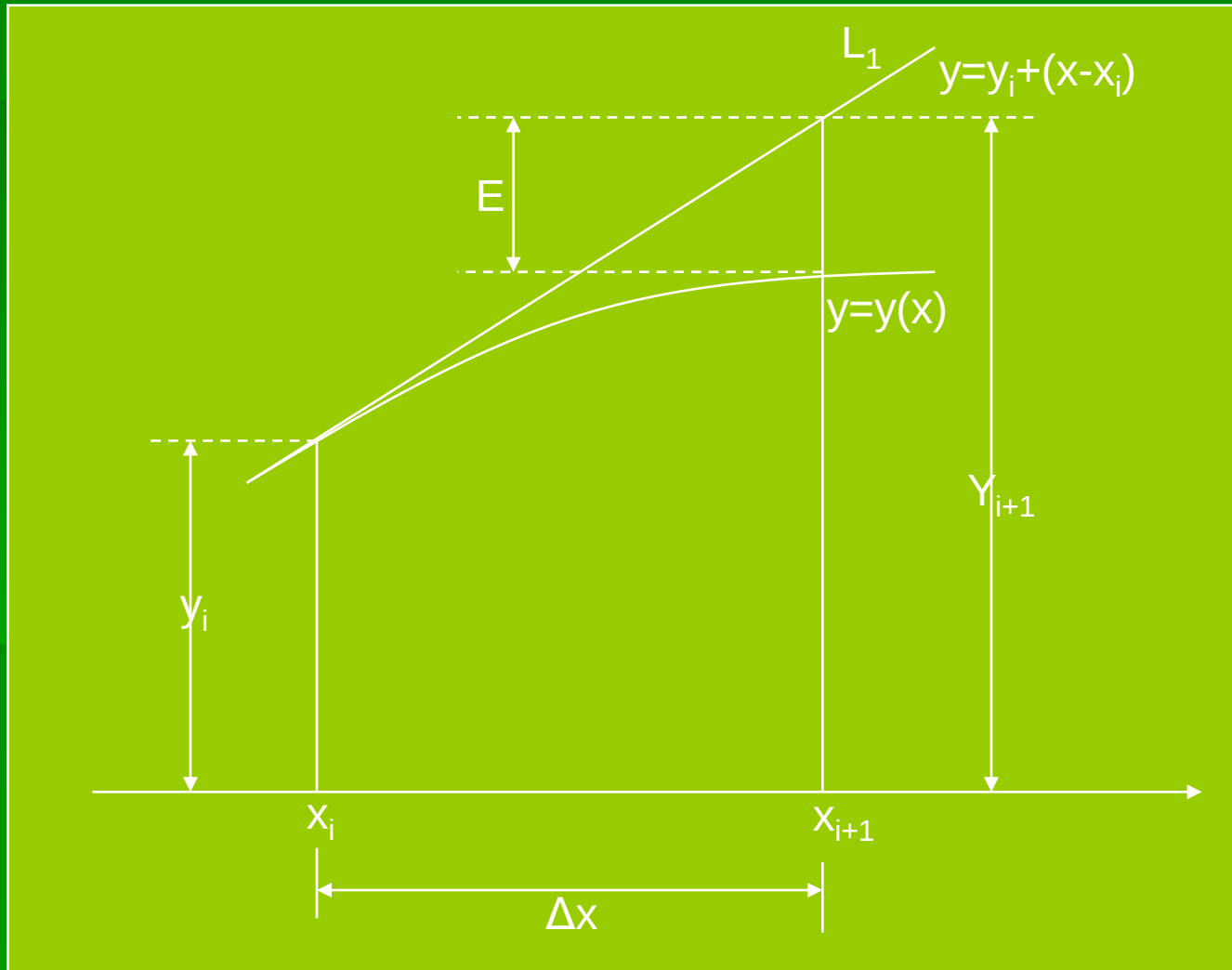
- Dengan Φ adalah perkiraan kemiringan yang digunakan untuk ekstrapolasi dari nilai y_i ke y_{i+1} yang berjarak Δx yaitu selisih antara $\Delta x = x_{i+1} - x_i$.

METODE EULER

- Sederhana, kurang teliti
- Diturunkan dari deret Taylor dengan mengabaikan suku yang mengandung pangkat lebih tinggi dari 2.
- Rumus :

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x$$

Metode Euler Secara Grafis



METODE HEUN

- Metode Heun merupakan modifikasi dari metode Euler. Modifikasi dilakukan dalam memperkirakan kemiringan Φ . Metode ini memperkirakan dua turunan pada interval, yaitu pada ujung awal dan akhir. Kedua turunan tersebut kemudian dirata-ratakan untuk mendapatkan perkiraan kemiringan yang lebih baik.

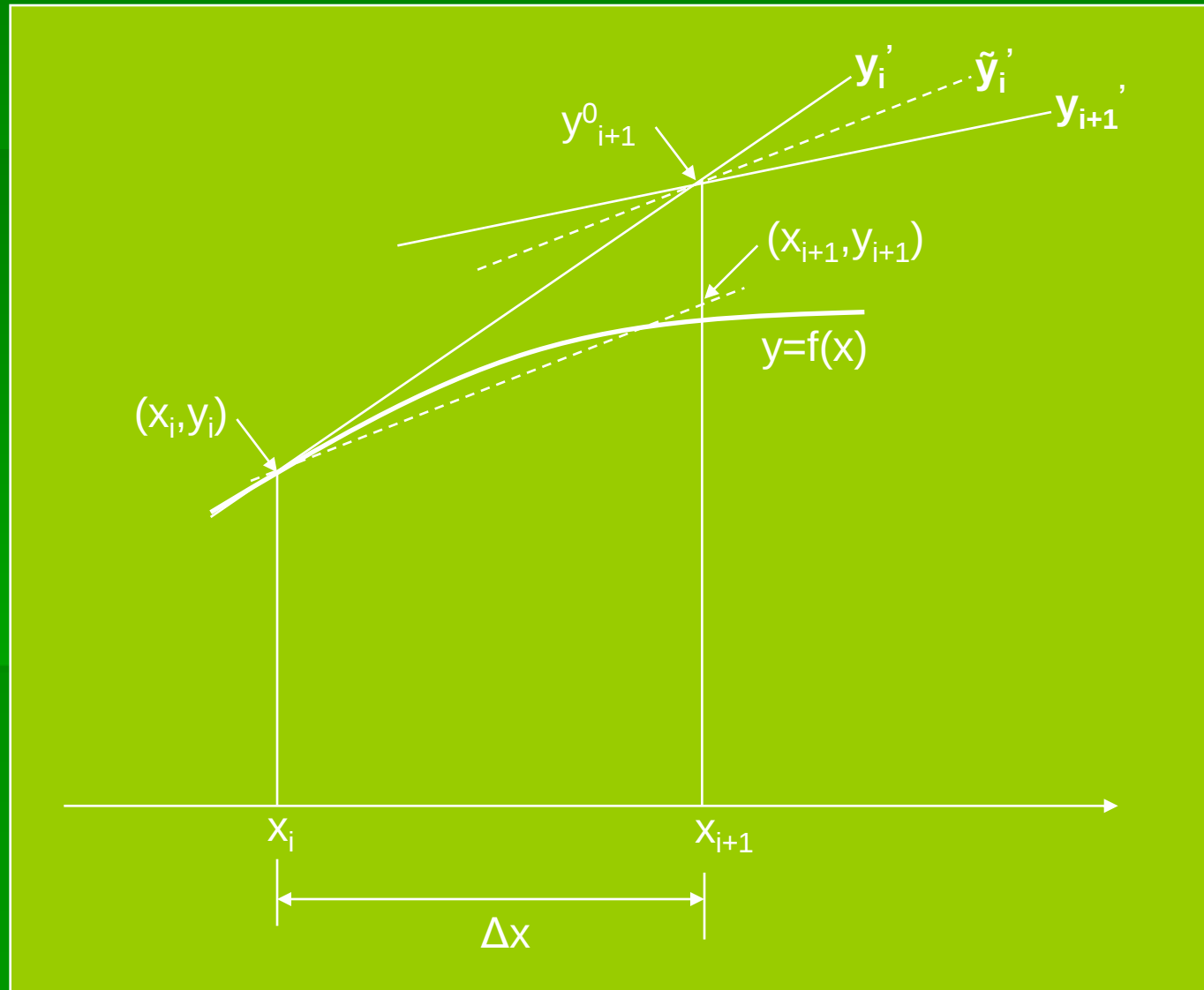
- Metode Heun terdiri dari persamaan prediktor dan persamaan korektor.
- Persamaan prediktor :

$$y^0_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x$$

- Persamaan korektor :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^0_{i+1})}{2} \Delta x$$

Metode Heun Secara Grafis



Metode Poligon (Euler yang dimodifikasi)

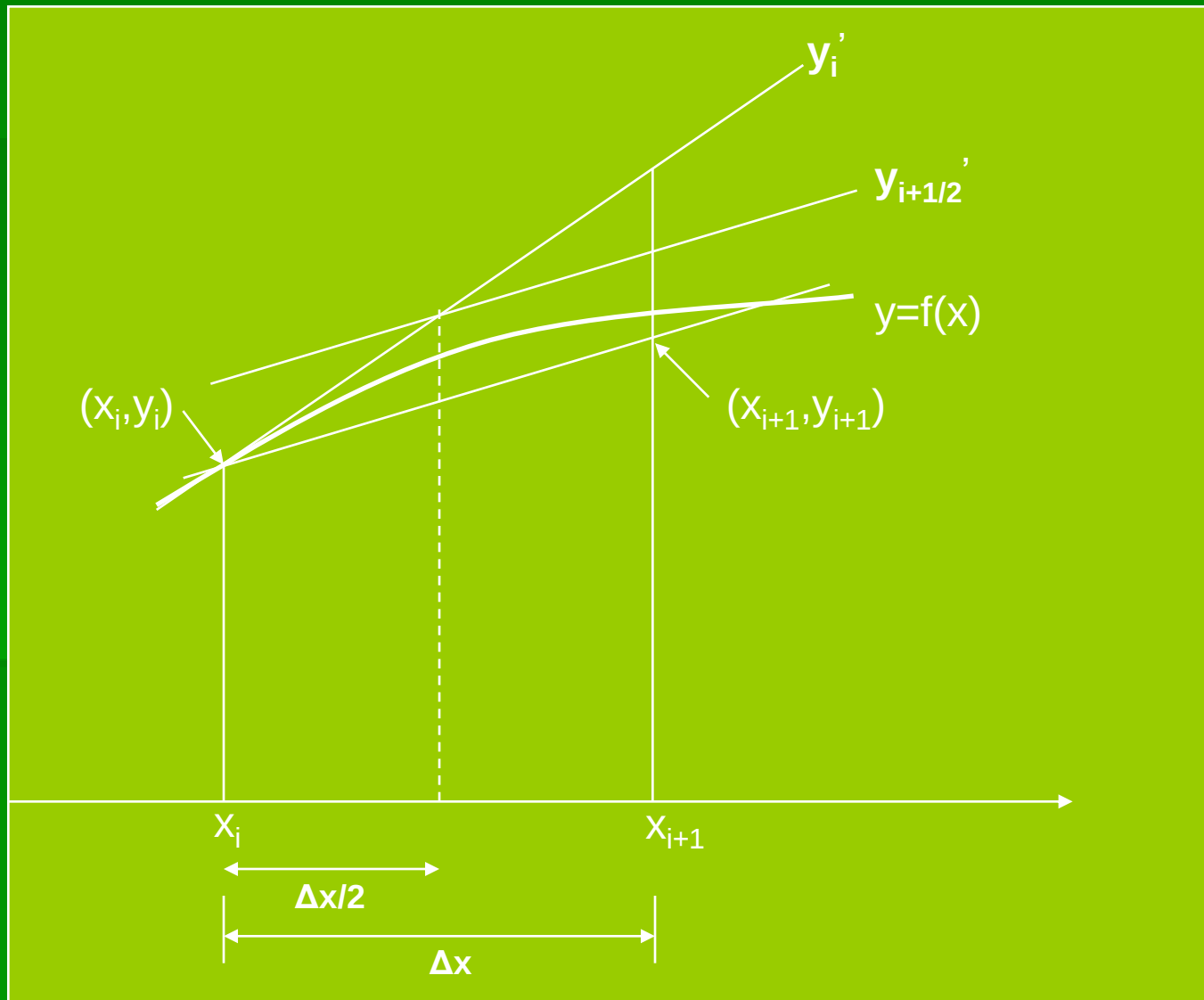
- Dalam metode poligon menggunakan metode Euler untuk memprediksi kemiringan nilai y pada titik tengah interval.
- Rumus :

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + f(x_i, y_i) \frac{\Delta x}{2}$$

$$y'_{i+\frac{1}{2}} = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}) \Delta x$$

Metode Poligon Secara Grafis



METODE RUNGE -KUTTA

- Bentuk umum rumus Runge-Kutta :

$$y_{i+1} = y_i + \Phi(x_i, y_i, \Delta x)\Delta x$$

- Dengan $\Phi(x_i, y_i, \Delta x)$ adalah fungsi pertambahan yang merupakan kemiringan rerata pada interval.
- Fungsi pertambahan dapat ditulis dalam bentuk umum :

$$\Phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n$$

LEONHARD EULER

- Lahir dekat Basel Swiss.
- Murid Johann Bernoulli
- Menulis matematika setara dengan 75 buku.
- Menemukan bilangan natural/ bilangan Euler $e = 2,7181828184....$
- Menemukan hubungan $e^{i\pi} = -1$
- Dapat mengingat di kepalanya hitungan sampai dengan 100 desimal.
- Seorang yang mencintai keluarga dan seringkali menghabiskan waktu sore dengan permainan-permainan yang ada sangkut pautnya dengan matematika.