

# **INTEGRASI NUMERIK**

---

**Kuliah**  
**METODE NUMERIK**  
**TKS12408**

**Wahyu Widiyanto**  
**Jurusan Teknik Sipil UNSOED**

# Pengertian Integral

---

Integral suatu fungsi adalah operator matematik yang dipresentasikan dalam bentuk :

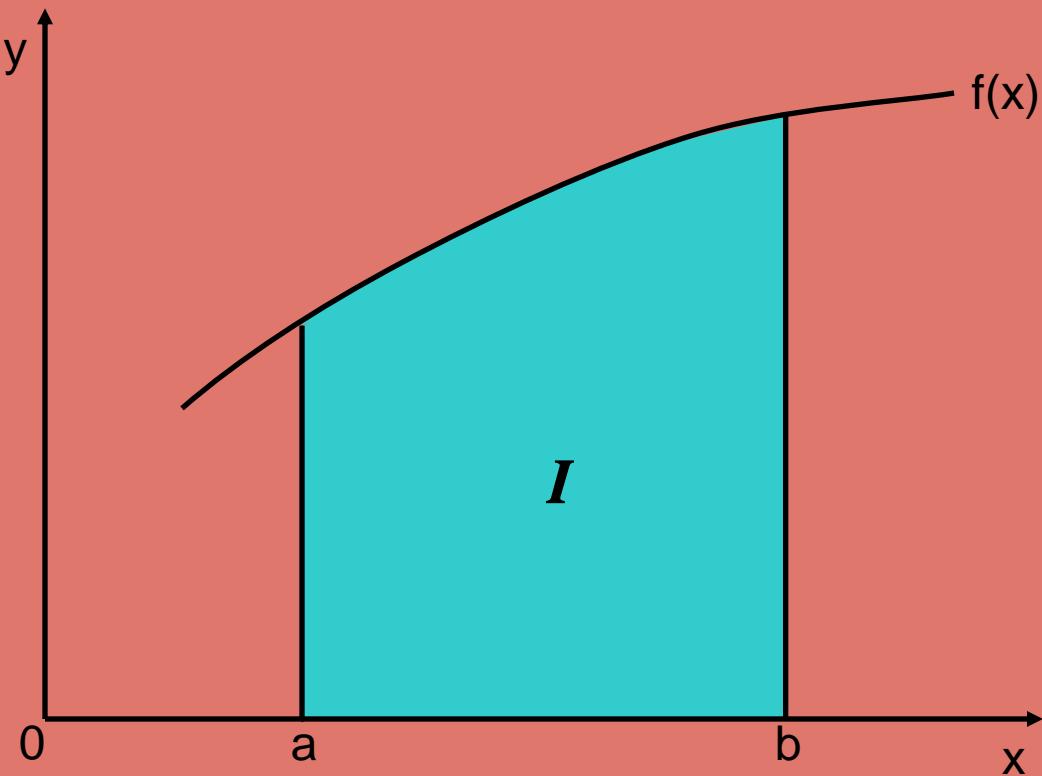
$$I = \int_a^b f(x)dx$$

- Dan merupakan integral suatu fungsi  $f(x)$  terhadap variabel  $x$  dengan batas-batas integrasi adalah dari  $x = a$  sampai  $x = b$ .
- Integral seperti di atas disebut juga integral tertentu.

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

# Gambaran Integral Secara Grafis

---



# Penyelesaian Analitis

---

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

- Dengan  $F(x)$  adalah integral dari  $f(x)$  sedemikian sehingga  $F'(x) = f(x)$ .
- Contoh :

$$\int_0^3 x^2 dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^3 = \left[ \frac{1}{3} (3)^3 - \frac{1}{3} (0)^3 \right] = 9$$

# Integral Numerik

---

- Merupakan metode pendekatan/perkiraan dari integral analitis.
- Integral numerik dilakukan apabila :
  1. integral tidak dapat (sukar) diselesaikan secara analitis,
  2. fungsi yang diintegralkan tidak diberikan dalam bentuk analitis, tetapi secara numerik dalam bentuk angka (tabel).

# Metode Integral Numerik

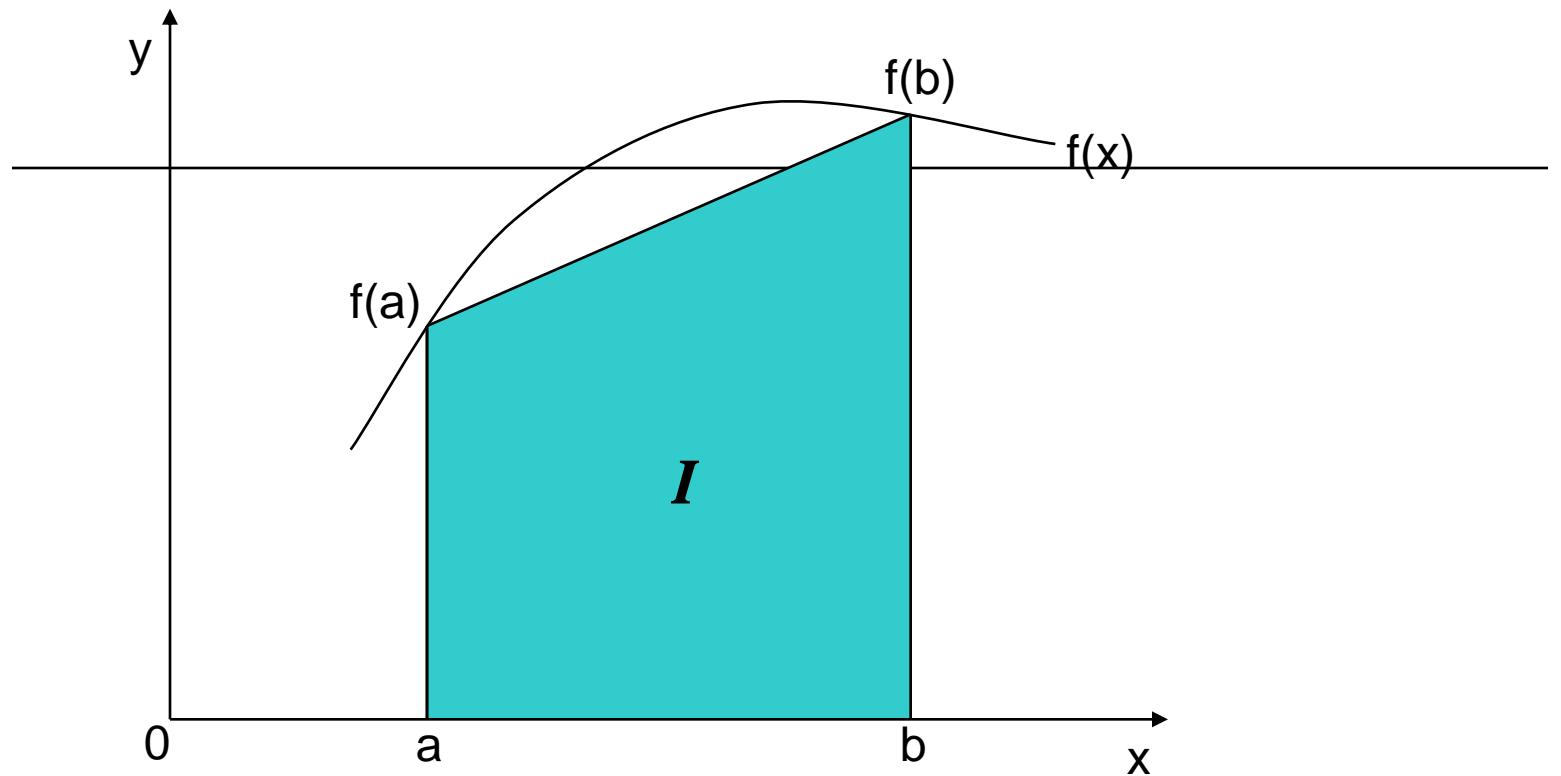
---

- Prinsip hitungan perkiraan dengan metode integrasi numerik adalah mendekati fungsi yang diintegralkan dengan fungsi polinomial yang diperoleh berdasar data tersedia.
- Macam metode penyelesaian dengan integral numerik a.l. :
  1. Metode trapesium
  2. Metode trapesium dengan banyak pias
  3. Metode Simpson (aturan Simpson 1/3, Simpson 1/3 dengan banyak pias, Simpson 3/8)
  4. Integral dengan panjang pias tidak sama
  5. Metode kuadratur

# Metode Trapezium

---

- Metode trapesium merupakan metode pendekatan integral numerik dengan persamaan polinomial order satu. Dalam metode ini kurva lengkung dari fungsi  $f(x)$  digantikan oleh garis lurus.

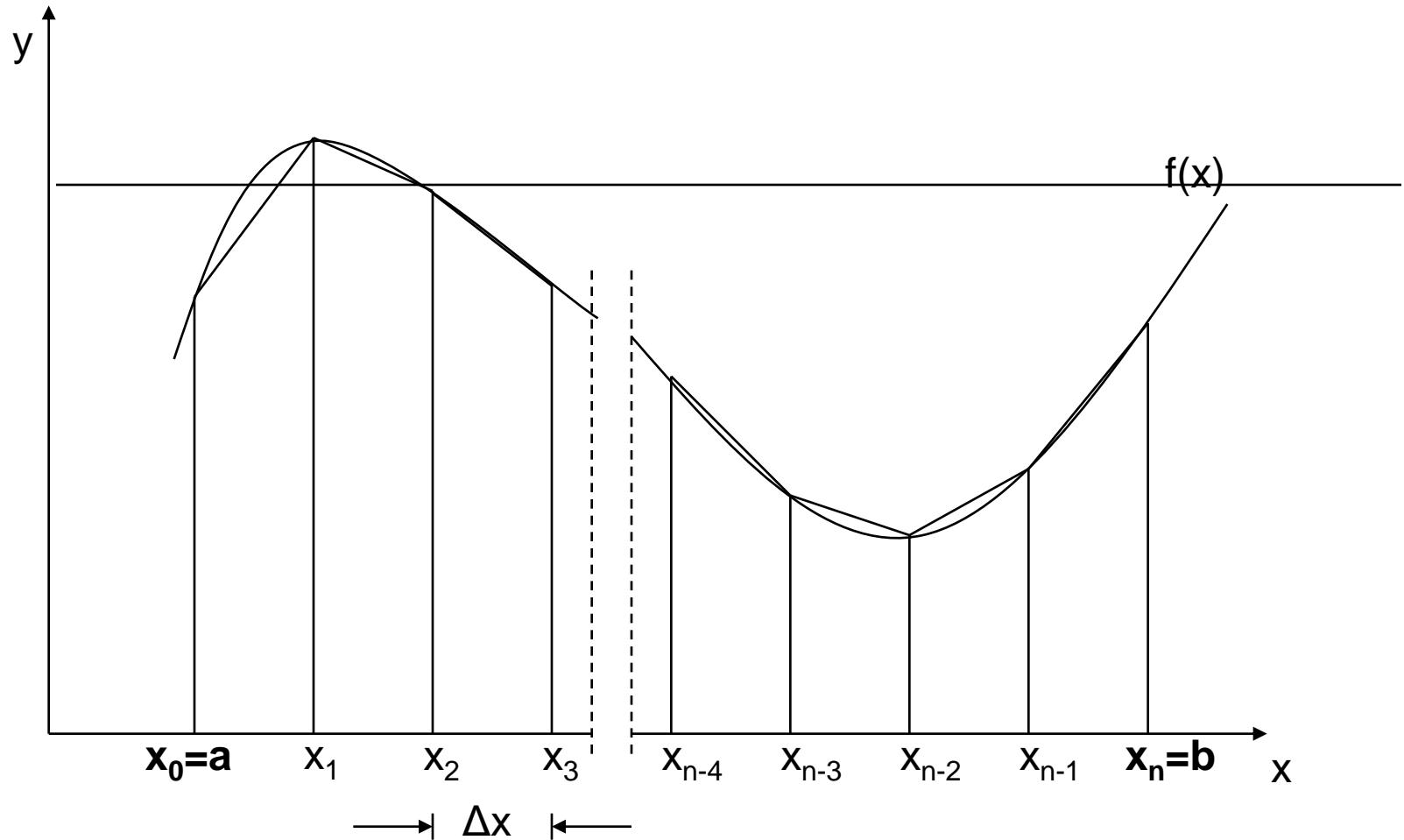


$$I = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

## Metode Trapesium dengan Banyak Pias

---

- Untuk mengurangi kesalahan pada metode trapesium dengan 1 pias maka kurva lengkung didekati oleh sejumlah garis lurus, sehingga terbentuk banyak pias.
- Integral adalah sama dengan luas bidang yang merupakan jumlah dari luas beberapa pias. Semakin kecil pias yang digunakan, hasil yang didapat akan semakin teliti.



$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

- 
- Integral total :

$$I = \frac{\Delta x}{2} \left[ f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

- Besar kesalahan yang terjadi :

$$E_t = -\frac{\Delta x^2}{12} (b-a) f''(x_i)$$

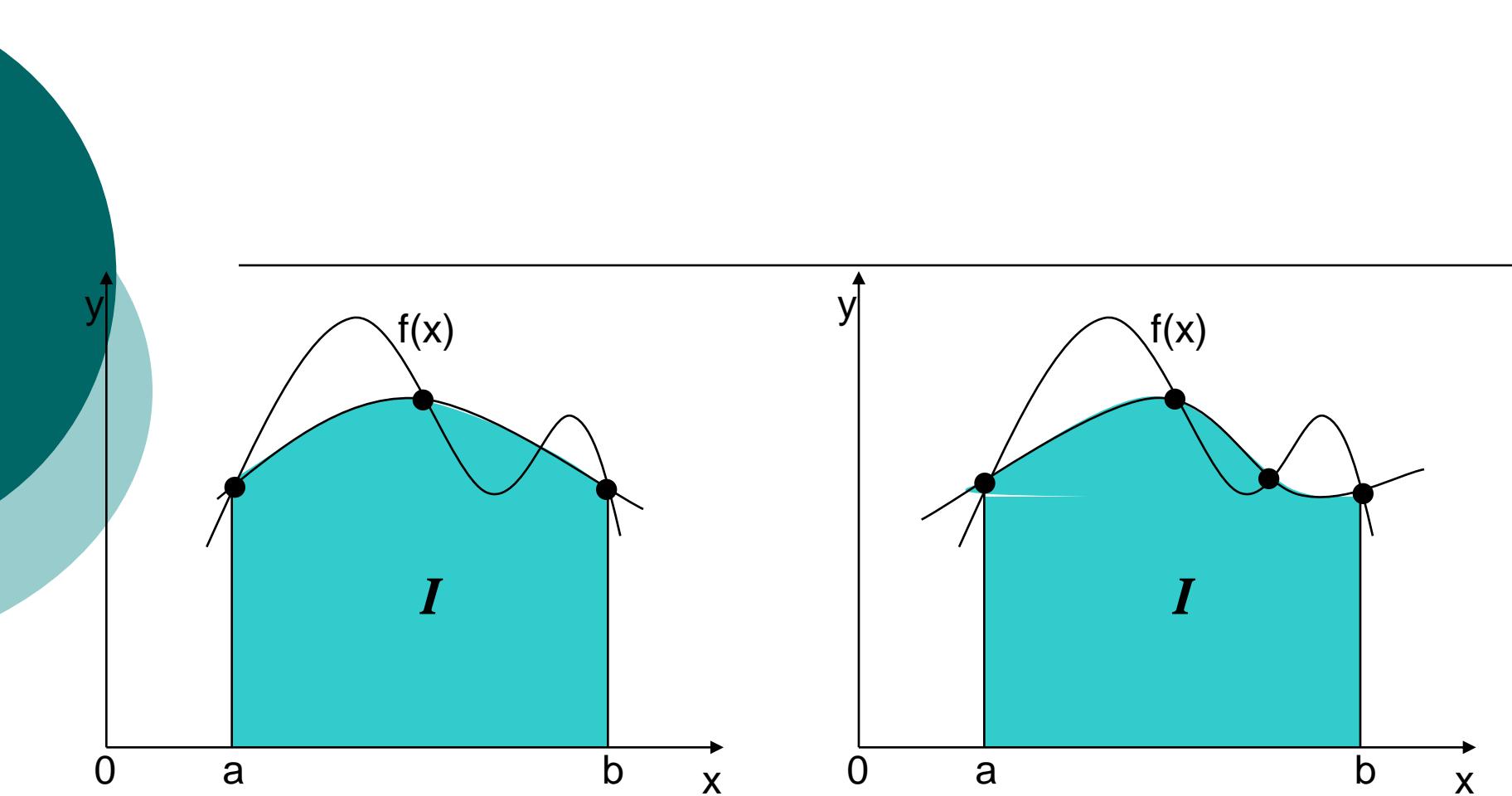
- Persamaan trapesium dengan koreksi ujung

$$I = \frac{\Delta x}{2} \left[ f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right] - \frac{\Delta x^2}{12} [f'(b) - f'(a)]$$

# Metode Simpson

---

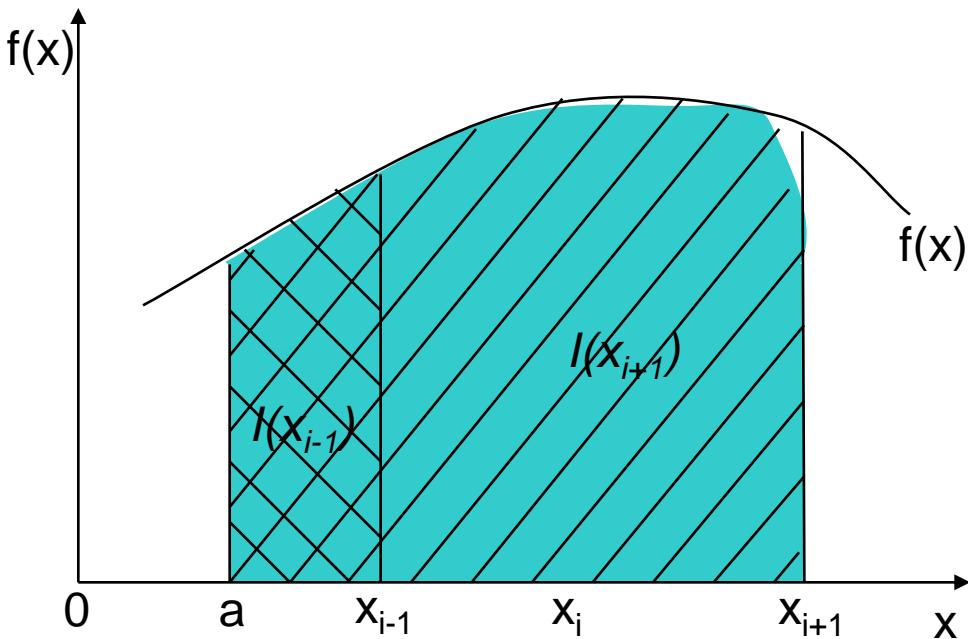
- Menggunakan polinomial dengan order lebih tinggi daripada metode trapesium.
- Membutuhkan titik tambahan di antara titik batas bawah (titik a) dan batas atas (titik b).



# Aturan Simpson 1/3

---

- Menggunakan polinomial order 2 (persamaan parabola) yang melalui 3 titik yaitu  $f(x_{i-1})$ ,  $f(x_i)$  dan  $f(x_{i+1})$  untuk mendekati fungsi.
- Rumus Simpson dapat diturunkan berdasar deret Taylor.



- Persamaan metode Simpson 1/3

---

$$A_i = \frac{\Delta x}{3} [f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}] + O(\Delta x^5)$$

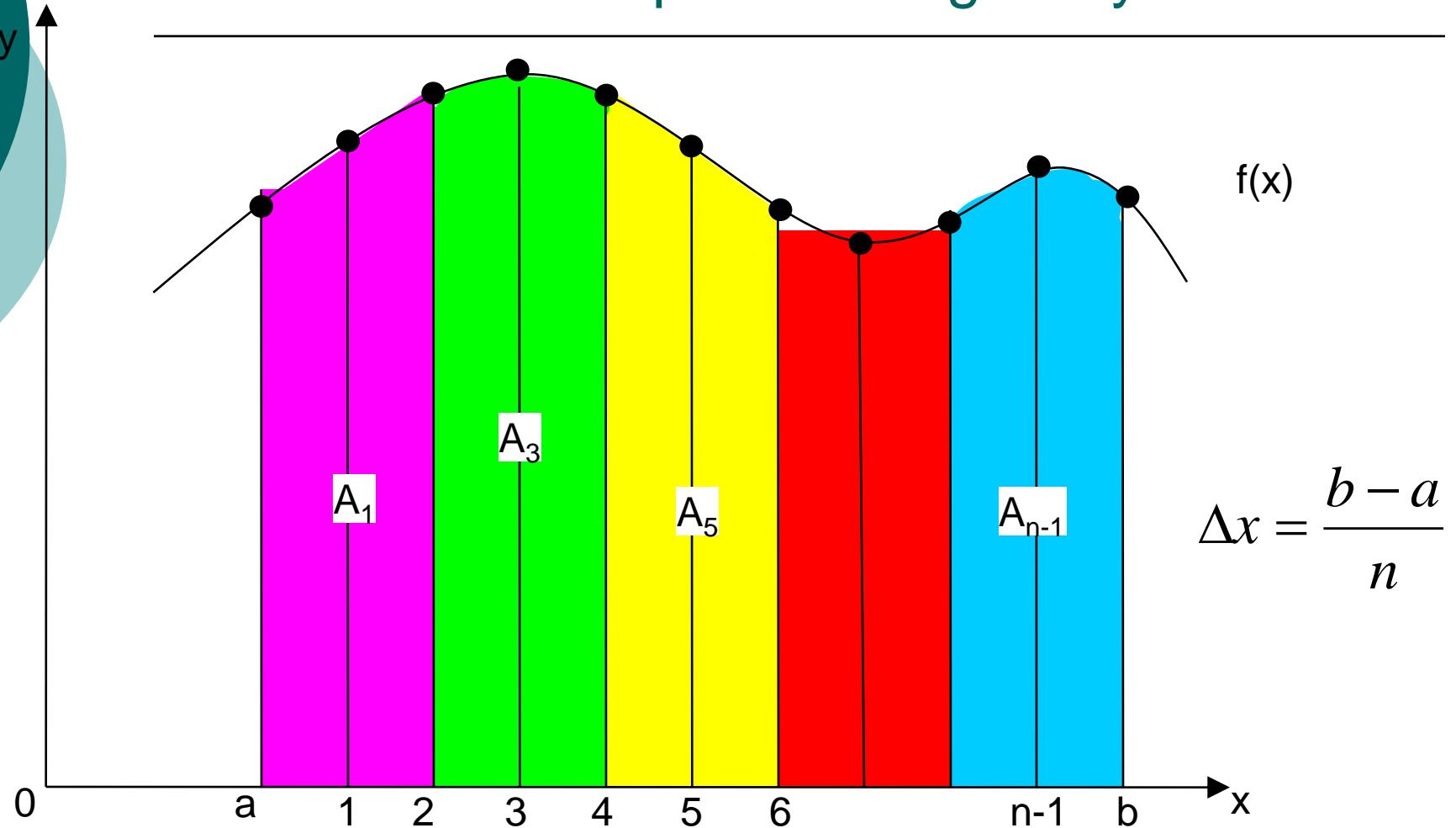
- Persamaan metode Simpson 1/3 untuk 1 pias

$$A_i = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(c) + f(b)]$$

- Kesalahan pemotongan

$$Et = -\frac{(b-a)^5}{2880} f''''(\xi)$$

## Aturan Simpson 1/3 dg Banyak Pias



- 
- Luas total = jumlah seluruh pias

$$\int_a^b f(x)dx = A_1 + A_3 + A_5 + \dots + A_{n-1}$$

- Rumus menjadi :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{3} \left[ f(a) + f(b) + 4 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=2}^{n-2} f(x_i) \right]$$

- Kesalahan yang terjadi :

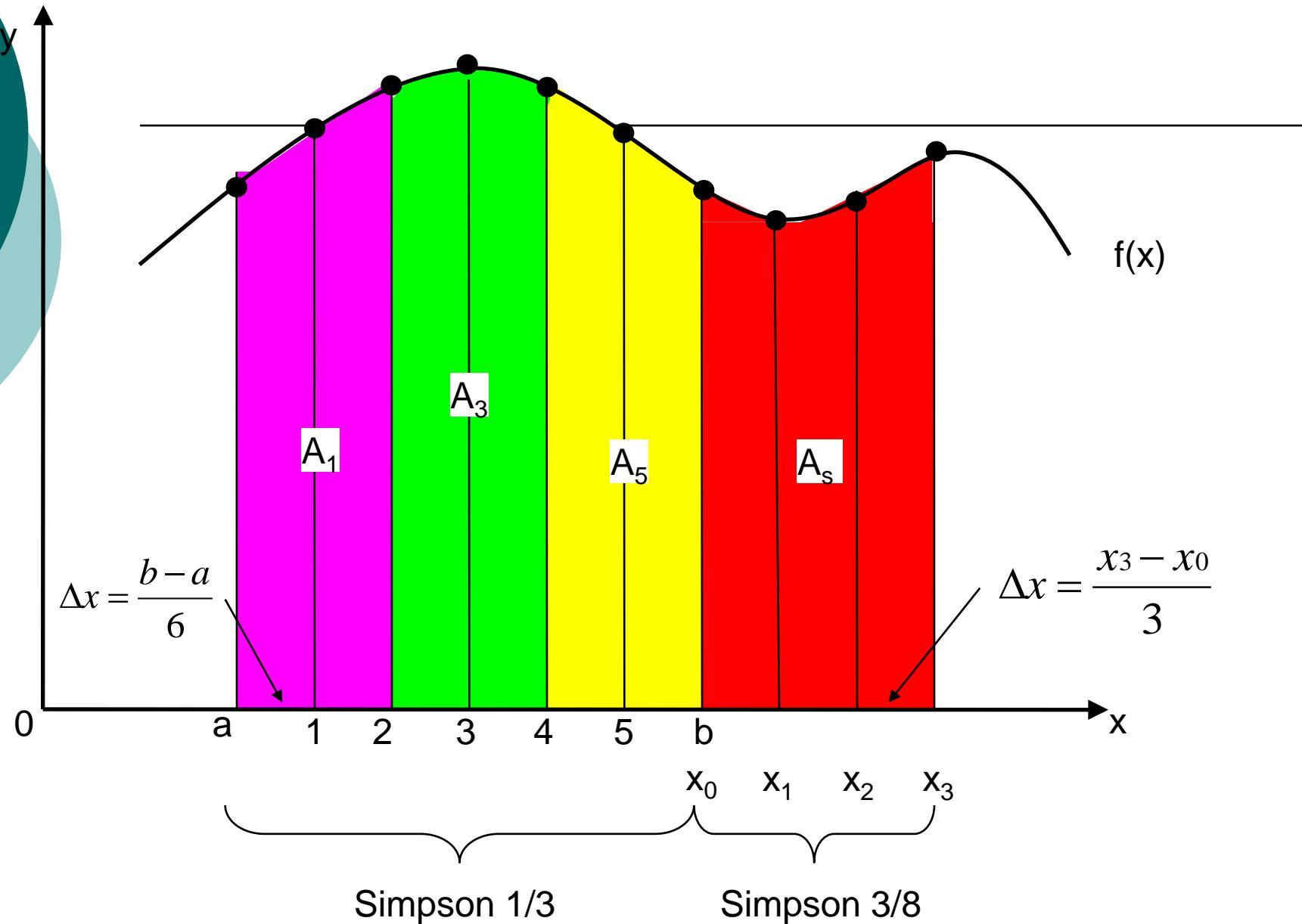
$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} \bar{f}''''$$

# Metode Simpson 3/8

---

- Diturunkan dengan menggunakan persamaan polinomial order 3 yang melalui 4 titik.
- Metode Simpson 1/3 biasanya lebih disukai karena mencapai ketelitian order 3 dan hanya memerlukan 3 titik, dibanding metode Simpson 3/8 yang membutuhkan 4 titik.
- Dalam pemakaian banyak pias, metode Simpson 1/3 hanya berlaku untuk jumlah pias genap.
- Untuk jumlah pias ganjil dapat digabung antara kedua metode, yaitu sejumlah genap pias genap digunakan metode Simpson 1/3 sedang 3 pias sisanya digunakan metode Simpson 3/8.

# Gabungan Aturan Simpson 1/3 dan Simpson 3/8



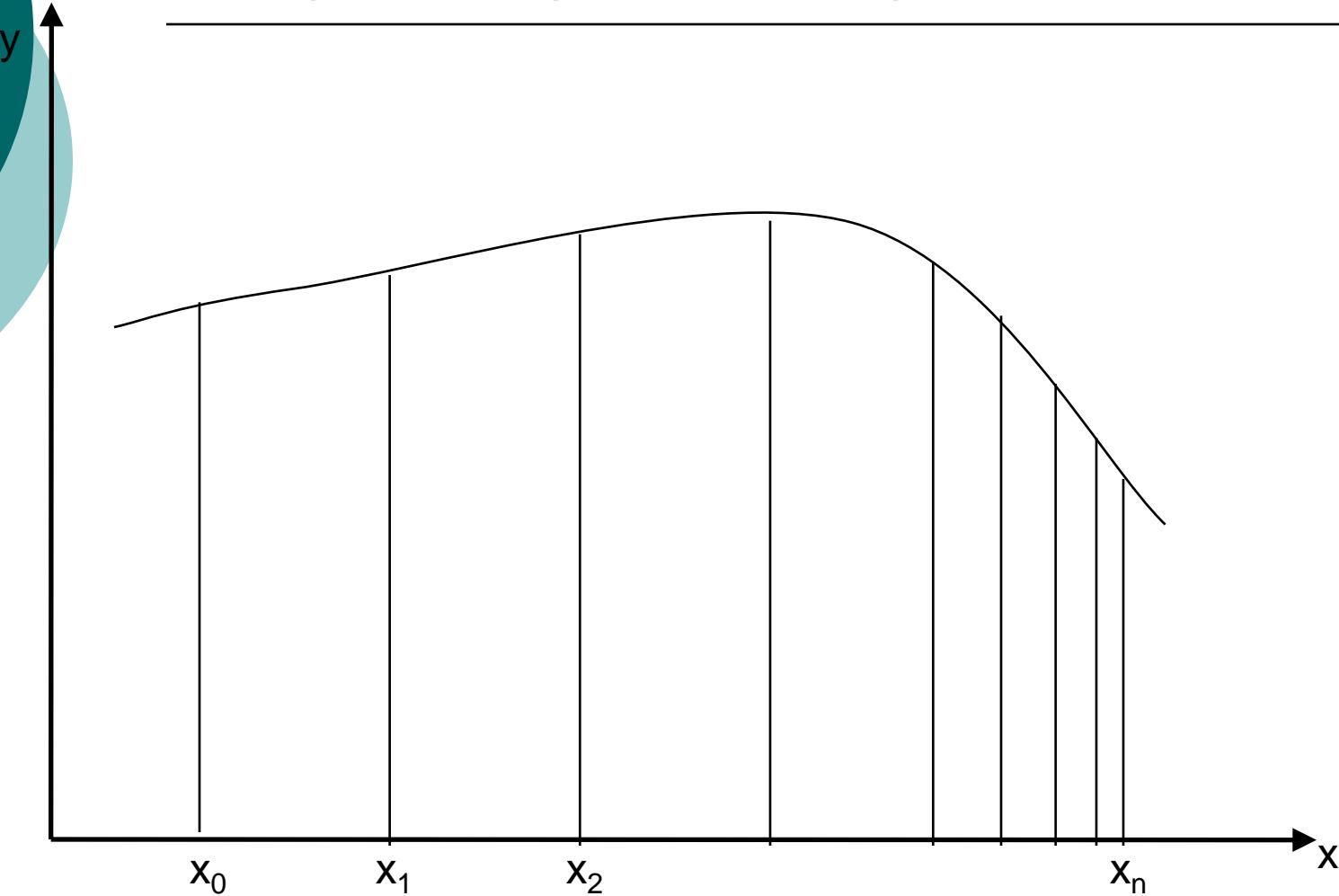
# Rumus Simpson 3/8

$$I = \frac{3\Delta x}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{3}$$

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{6480} f''''(\xi)$$

## Integral dengan Panjang Pias Tidak Sama



- 
- Pada kurva yang melengkung lebih tajam diperlukan jumlah pias yang lebih banyak sehingga panjang pias lebih kecil dibanding dengan pada kurva yang relatif datar.
  - Penyelesaian yang paling sesuai adalah dengan metode trapesium dengan banyak pias.

$$I = \Delta x_1 \frac{f(x_1) + f(x_0)}{2} + \Delta x_2 \frac{f(x_2) + f(x_1)}{2} + \dots + \Delta x_n \frac{f(x_n) + f(x_{n-1})}{2}$$

- Dengan :

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

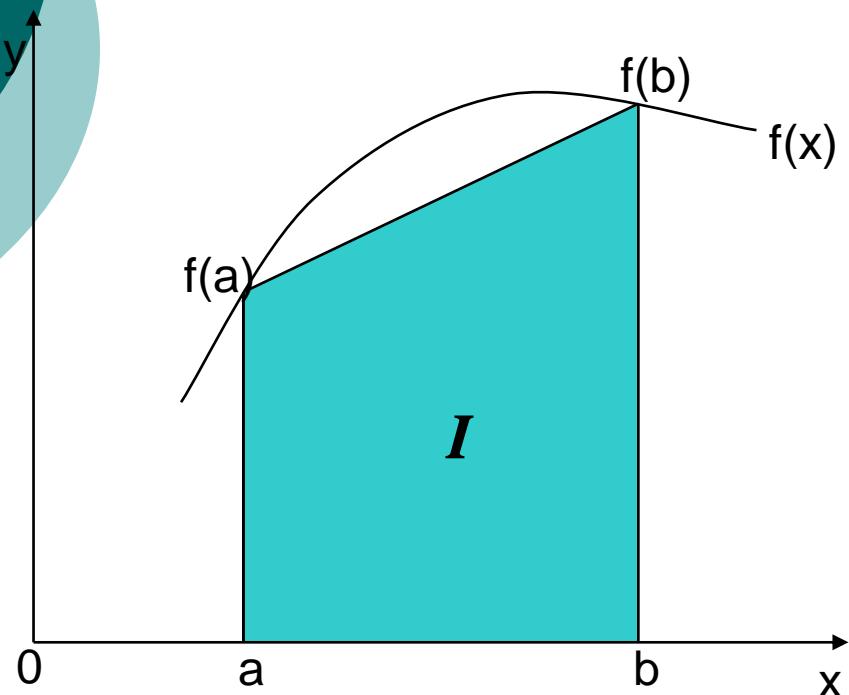
# Metode Kuadratur

---

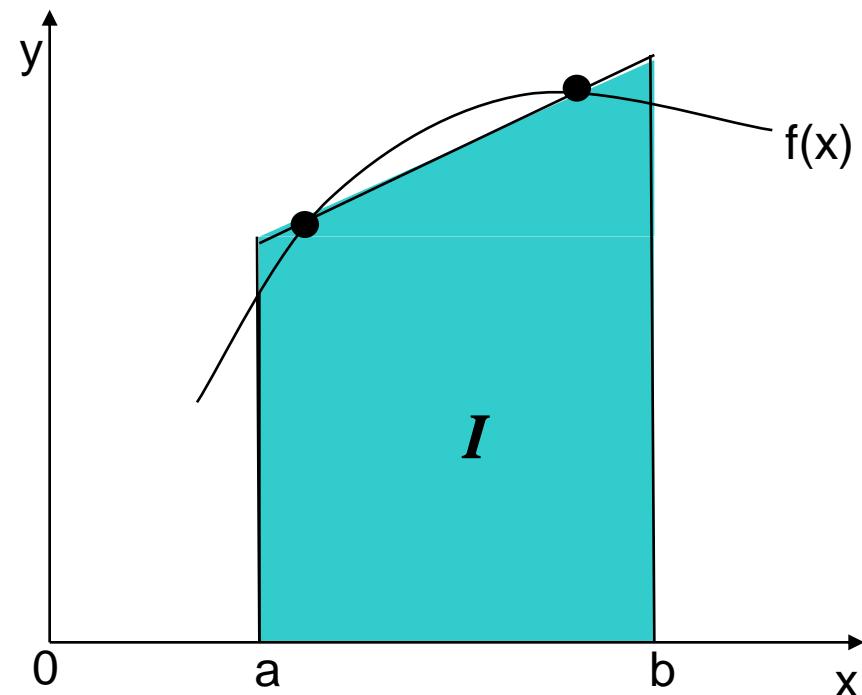
Trapesium & Simpson	Kuadratur
<ul style="list-style-type: none"><li>○ Yang diintegralkan berbentuk tabel atau fungsi.</li><li>○ Integral didasarkan pada luasan di bawah garis lurus yang menghubungkan nilai-nilai dari fungsi pada ujung-ujung interval integrasi.</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>○ Yang diintegralkan berupa fungsi.</li><li>○ Integral didasarkan pada luasan di bawah garis yang menghubungkan dua titik sembarang pada kurva.</li></ul>

# Bentuk Grafis Metode Trapesium dan Gauss Kuadratur

---



TRAPESIUM



GAUSS KUADRATUR