



INTEGRASI NUMERIK

Kuliah
METODE NUMERIK
TKS12408

Wahyu Widiyanto
Jurusan Teknik Sipil UNSOED

Pengertian Integral

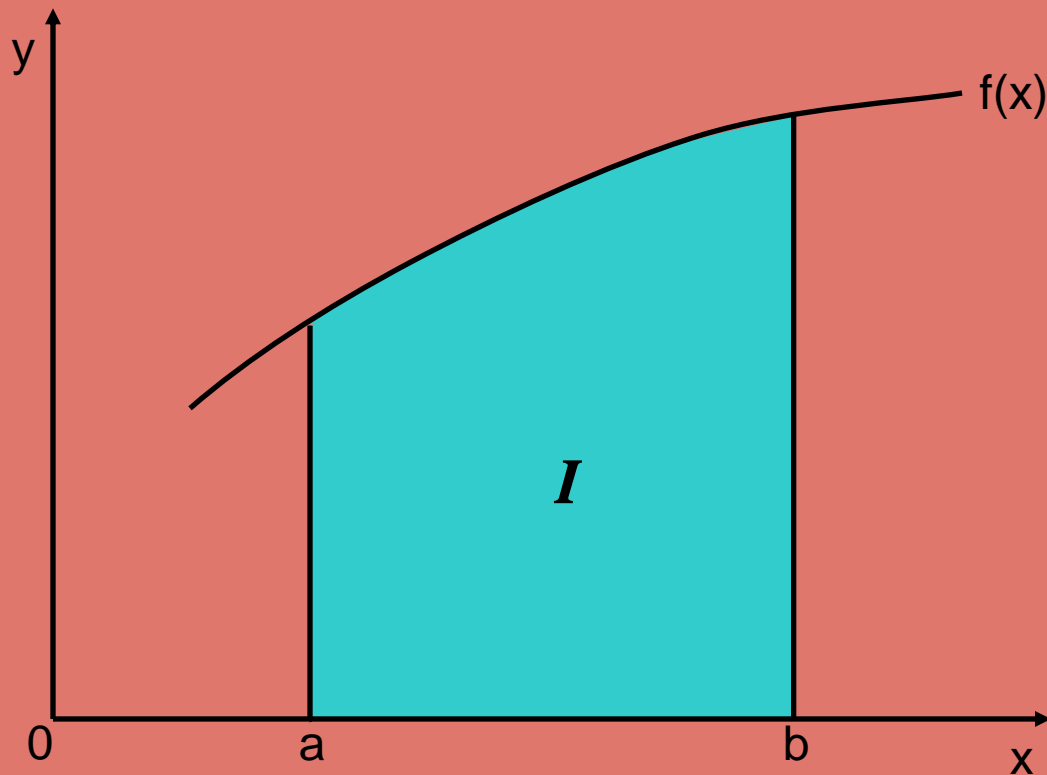
- Integral suatu fungsi adalah operator matematik yang dipresentasikan dalam bentuk :

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

- Dan merupakan integral suatu fungsi $f(x)$ terhadap variabel x dengan batas-batas integrasi adalah dari $x = a$ sampai $x = b$.
- Integral seperti di atas disebut juga integral tertentu.

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(a) - F(b)$$

Gambaran Integral Secara Grafis



Penyelesaian Analitis

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(a) - F(b)$$

- Dengan $F(x)$ adalah integral dari $f(x)$ sedemikian sehingga $F'(x) = f(x)$.
- Contoh :

$$\int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^3 = \left[\frac{1}{3} (3)^3 - \frac{1}{3} (0)^3 \right] = 9$$



Integral Numerik

- Merupakan metode pendekatan/perkiraan dari integral analitis.
- Integral numerik dilakukan apabila :
 1. integral tidak dapat (sukar) diselesaikan secara analitis,
 2. fungsi yang diintegrasikan tidak diberikan dalam bentuk analitis, tetapi secara numerik dalam bentuk angka (tabel).

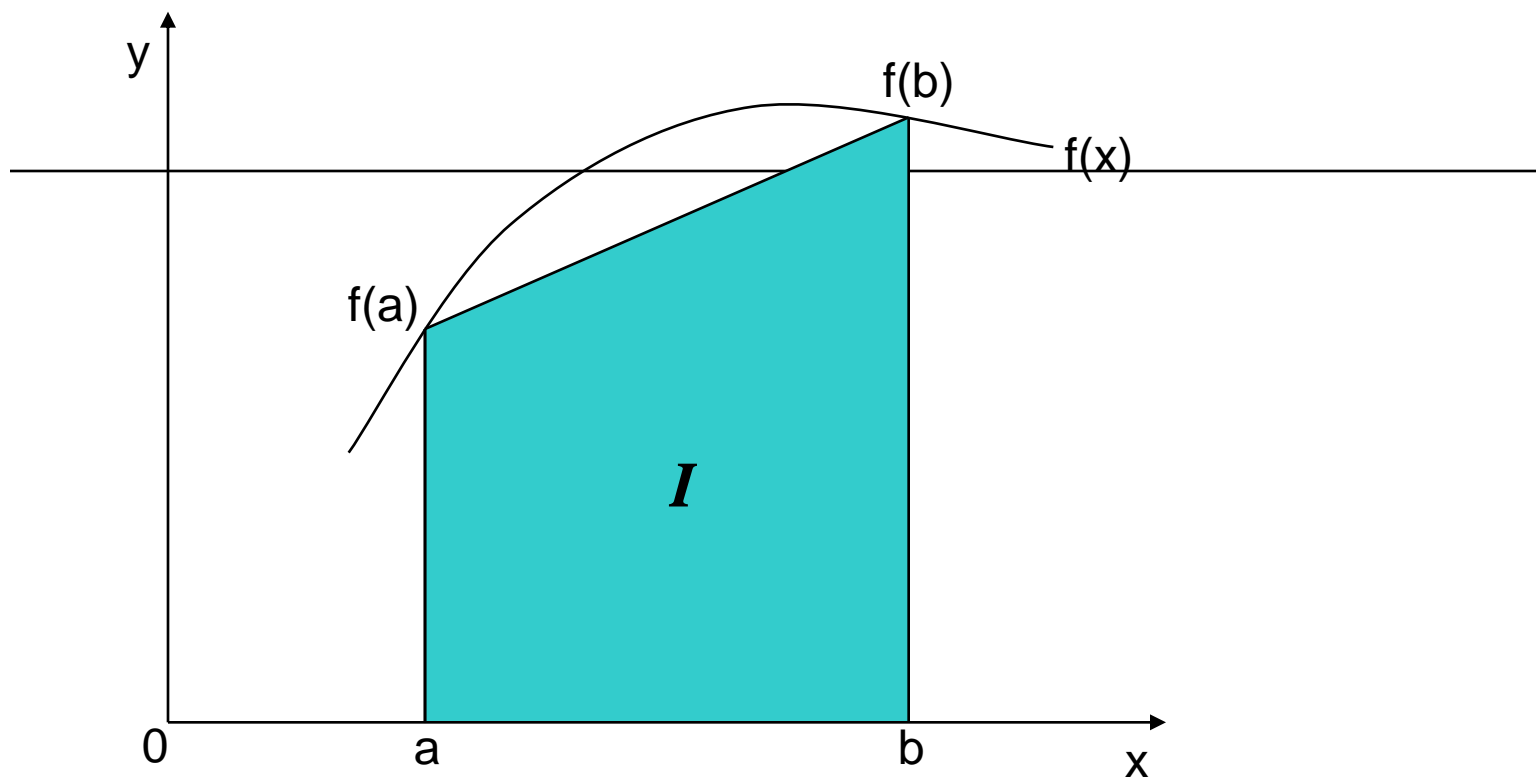
Metode Integral Numerik

- Prinsip hitungan perkiraan dengan metode integrasi numerik adalah mendekati fungsi yang diintegrasikan dengan fungsi polinomial yang diperoleh berdasar data tersedia.
- Macam metode penyelesaian dengan integral numerik a.l. :
 1. Metode trapesium
 2. Metode trapesium dengan banyak pias
 3. Metode Simpson (aturan Simpson 1/3, Simpson 1/3 dengan banyak pias, Simpson 3/8)
 4. Integral dengan panjang pias tidak sama
 5. Metode kuadratur



Metode Trapesium

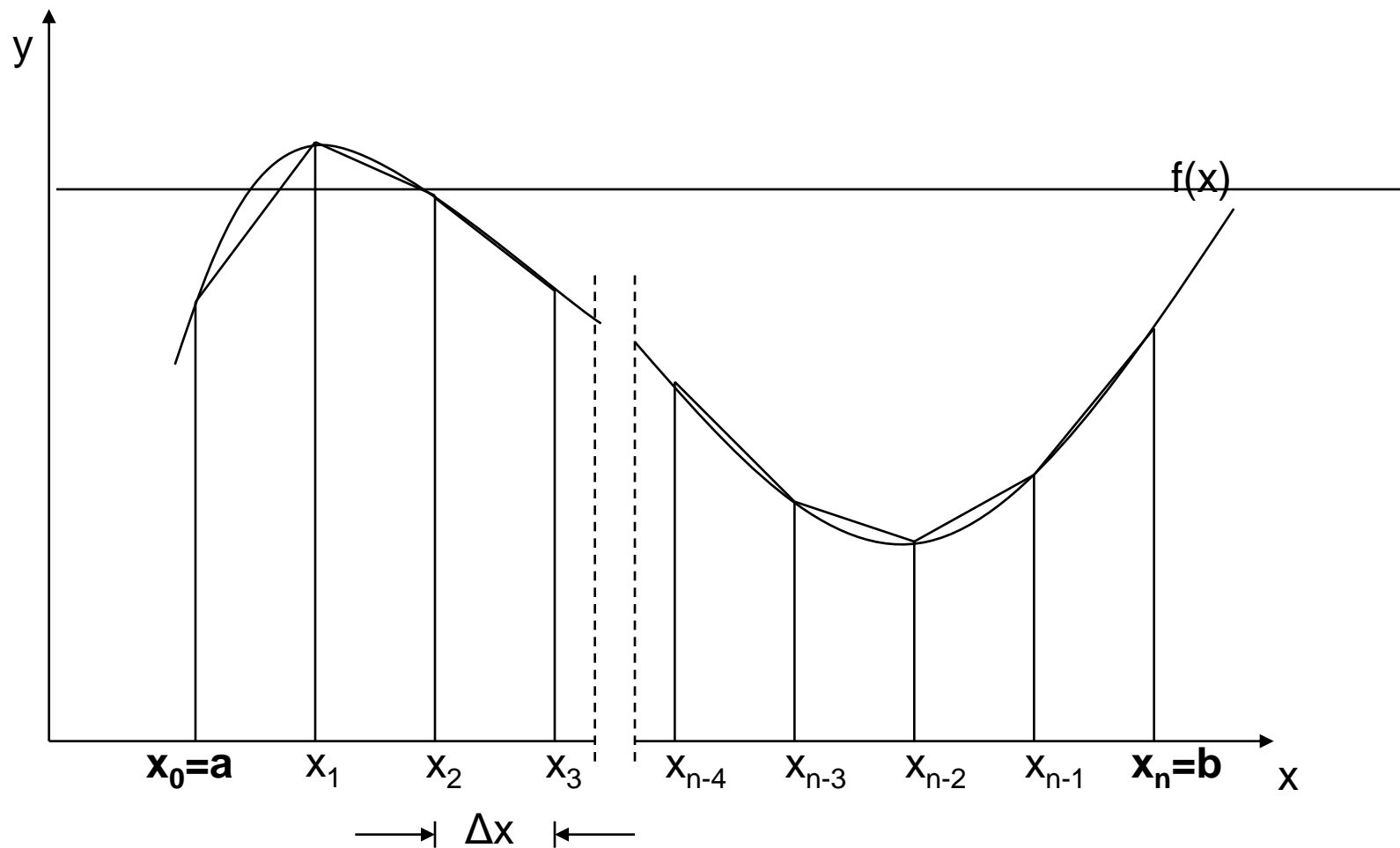
- Metode trapesium merupakan metode pendekatan integral numerik dengan persamaan polinomial order satu. Dalam metode ini kurva lengkung dari fungsi $f(x)$ digantikan oleh garis lurus.



$$I = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Metode Trapesium dengan Banyak Pias

- Untuk mengurangi kesalahan pada metode trapesium dengan 1 pias maka kurva lengkung didekati oleh sejumlah garis lurus, sehingga terbentuk banyak pias.
- Integral adalah sama dengan luas bidang yang merupakan jumlah dari luas beberapa pias. Semakin kecil pias yang digunakan, hasil yang didapat akan semakin teliti.



$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

-
- Integral total :

$$I = \frac{\Delta x}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

- Besar kesalahan yang terjadi :

$$E_t = -\frac{\Delta x^2}{12} (b-a) f''(x_i)$$

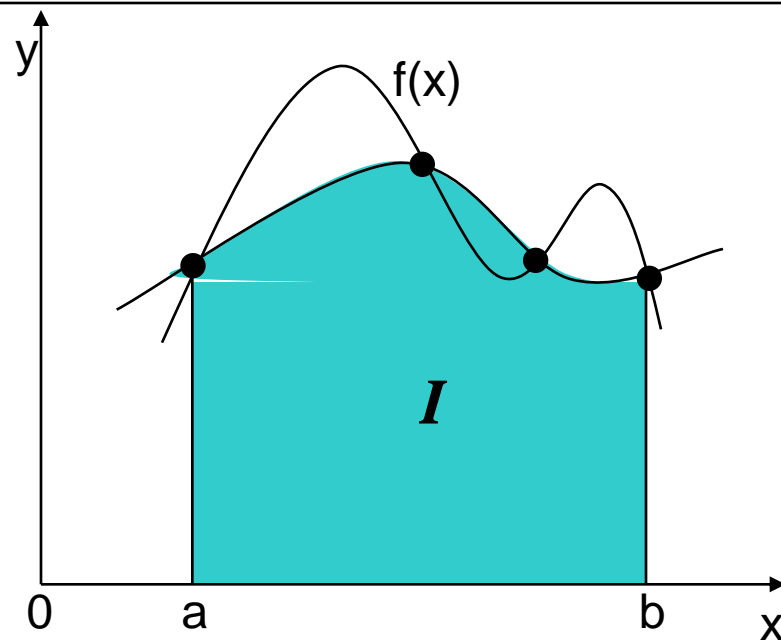
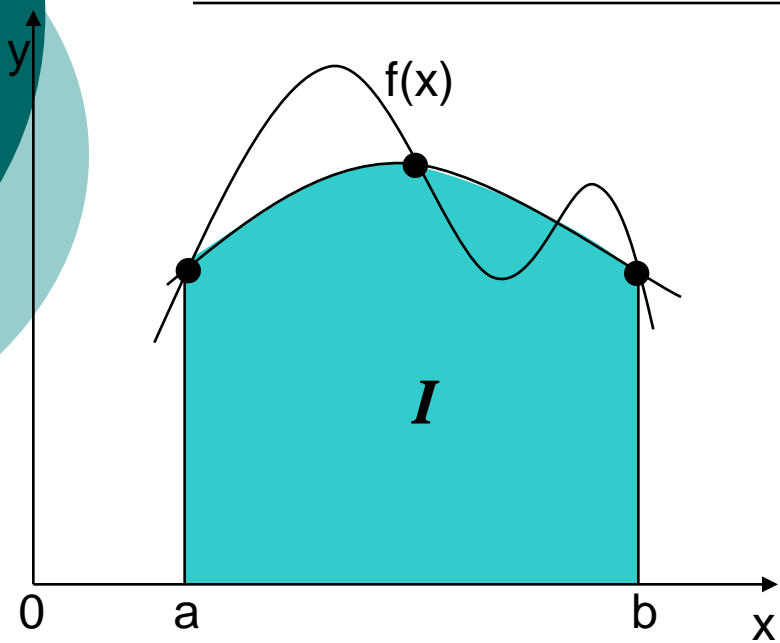
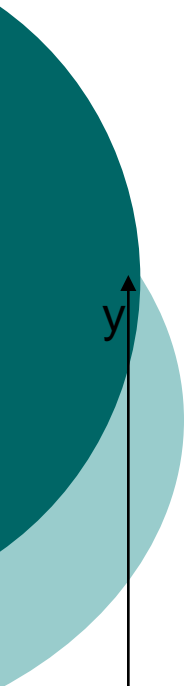
- Persamaan trapesium dengan koreksi ujung

$$I = \frac{\Delta x}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right] - \frac{\Delta x^2}{12} [f'(b) - f'(a)]$$



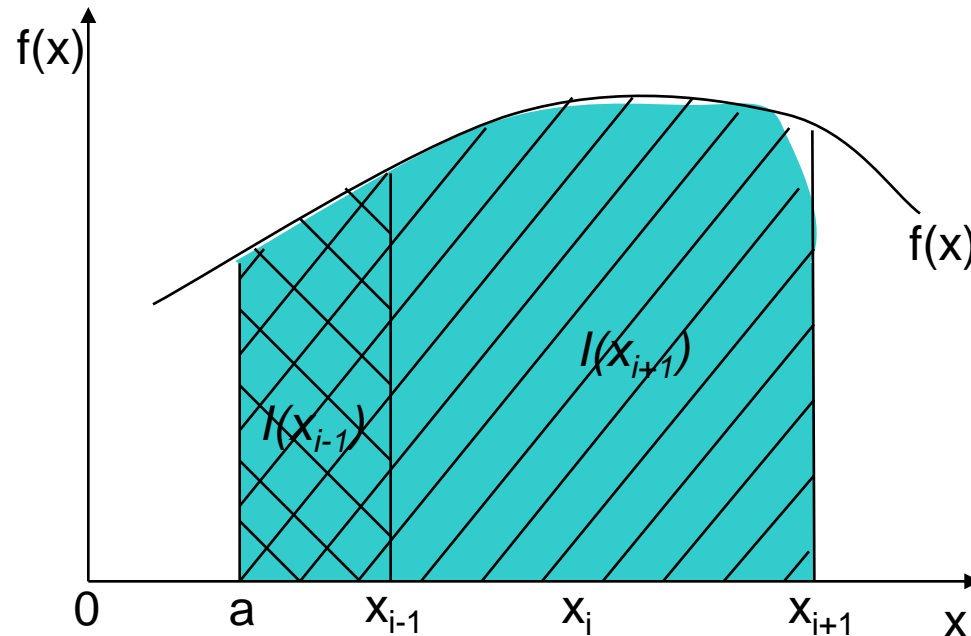
Metode Simpson

- Menggunakan polinomial dengan order lebih tinggi daripada metode trapesium.
- Membutuhkan titik tambahan di antara titik batas bawah (titik a) dan batas atas (titik b).



Aturan Simpson 1/3

- Menggunakan polinomial order 2 (persamaan parabola) yang melalui 3 titik yaitu $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$ dan $f(x_{i+1})$ untuk mendekati fungsi.
- Rumus Simpson dapat diturunkan berdasar deret Taylor.



- Persamaan metode Simpson 1/3

$$A_i = \frac{\Delta x}{3} [f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}] + O(\Delta x^5)$$

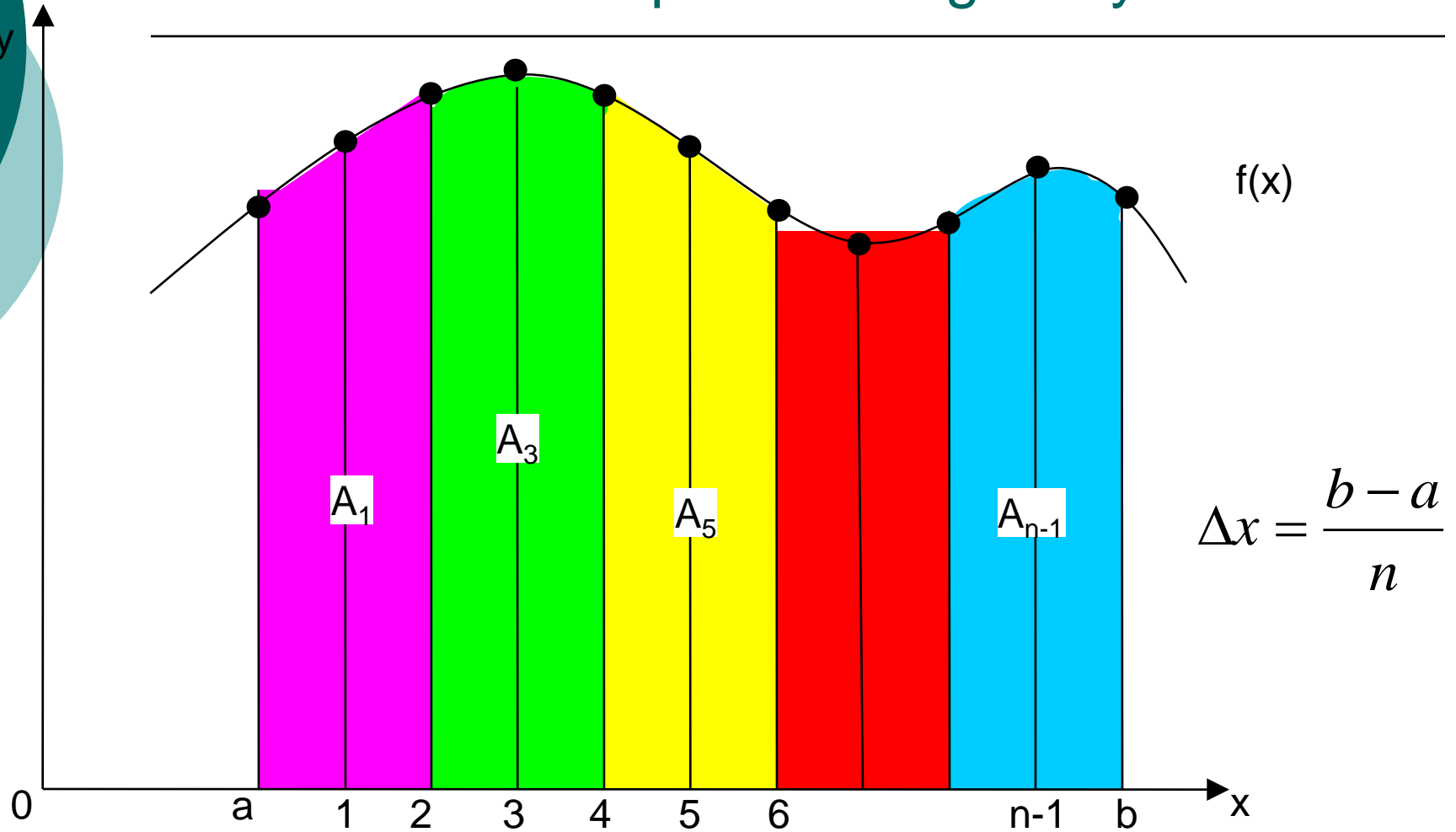
- Persamaan metode Simpson 1/3 untuk 1 pias

$$A_i = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(c) + f(b)]$$

- Kesalahan pemotongan

$$Et = -\frac{(b-a)^5}{2880} f''''(\xi)$$

Aturan Simpson 1/3 dg Banyak Pias



-
- Luas total = jumlah seluruh pias

$$\int_a^b f(x)dx = A_1 + A_3 + A_5 + \dots + A_{n-1}$$

- Rumus menjadi :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{3} \left[f(a) + f(b) + 4 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=2}^{n-2} f(x_i) \right]$$

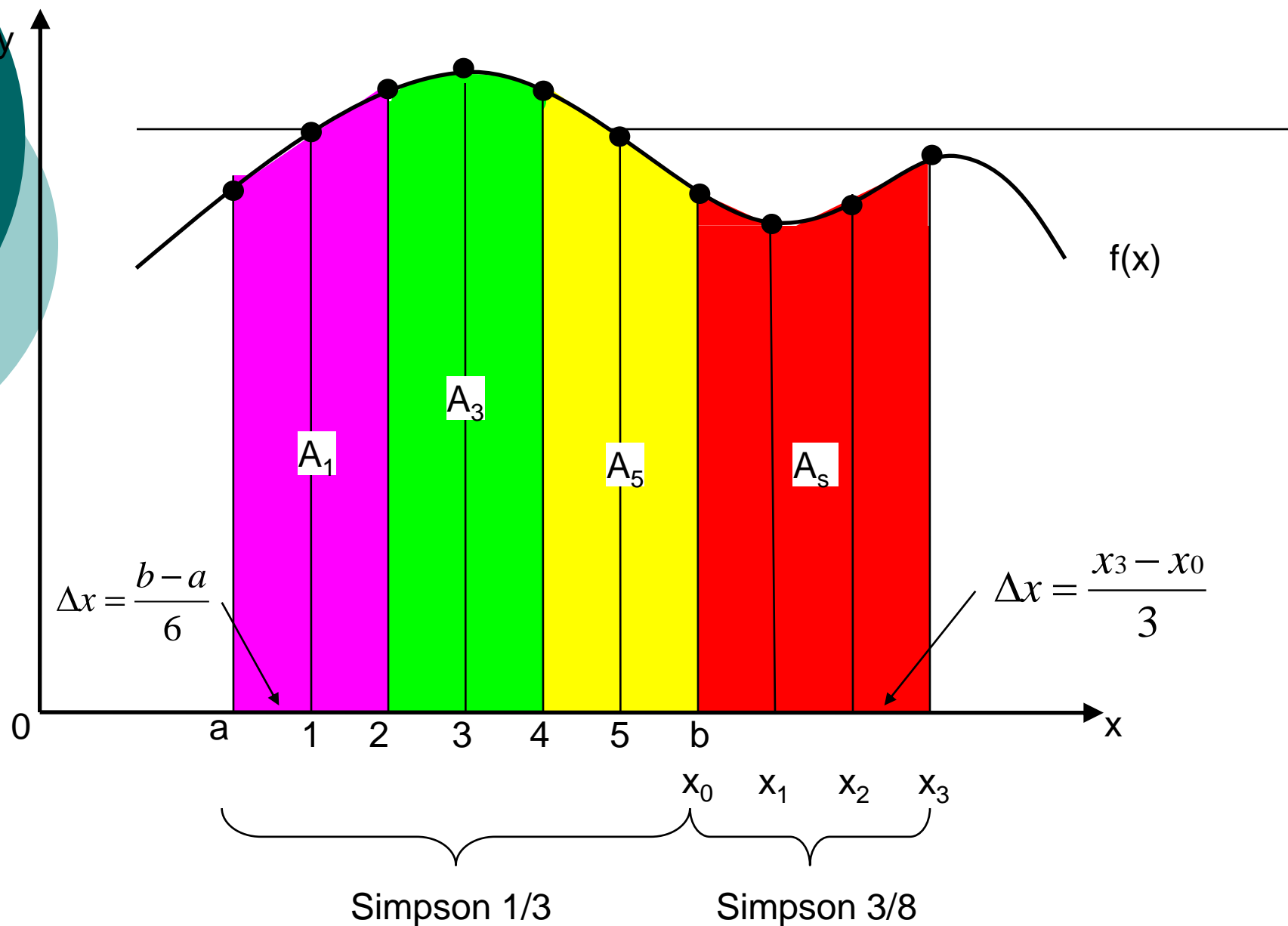
- Kesalahan yang terjadi :

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f''''$$

Metode Simpson 3/8

- Diturunkan dengan menggunakan persamaan polinomial order 3 yang melalui 4 titik.
- Metode Simpson 1/3 biasanya lebih disukai karena mencapai ketelitian order 3 dan hanya memerlukan 3 titik, dibanding metode Simpson 3/8 yang membutuhkan 4 titik.
- Dalam pemakaian banyak pias, metode Simpson 1/3 hanya berlaku untuk jumlah pias genap.
- Untuk jumlah pias ganjil dapat digabung antara kedua metode, yaitu sejumlah genap pias genap digunakan metode Simpson 1/3 sedang 3 pias sisanya digunakan metode Simpson 3/8.

Gabungan Aturan Simpson 1/3 dan Simpson 3/8



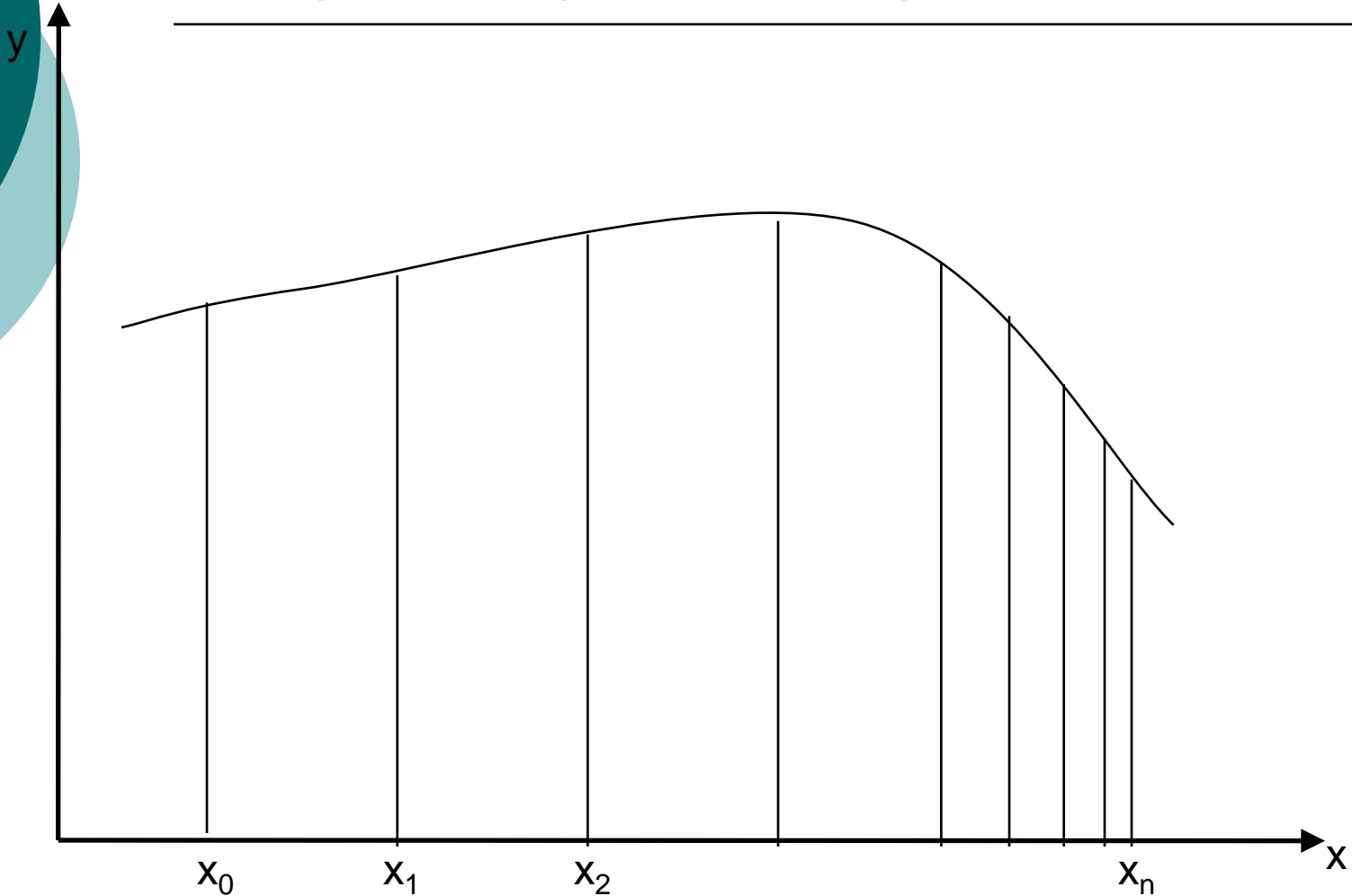
Rumus Simpson 3/8

$$I = \frac{3\Delta x}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{3}$$

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{6480} f''''(\xi)$$

Integral dengan Panjang Pias Tidak Sama



- Pada kurva yang melengkung lebih tajam diperlukan jumlah pias yang lebih banyak sehingga panjang pias lebih kecil dibanding dengan pada kurva yang relatif datar.
- Penyelesaian yang paling sesuai adalah dengan metode trapesium dengan banyak pias.

$$I = \Delta x_1 \frac{f(x_1) + f(x_0)}{2} + \Delta x_2 \frac{f(x_2) + f(x_1)}{2} + \dots + \Delta x_n \frac{f(x_n) + f(x_{n-1})}{2}$$

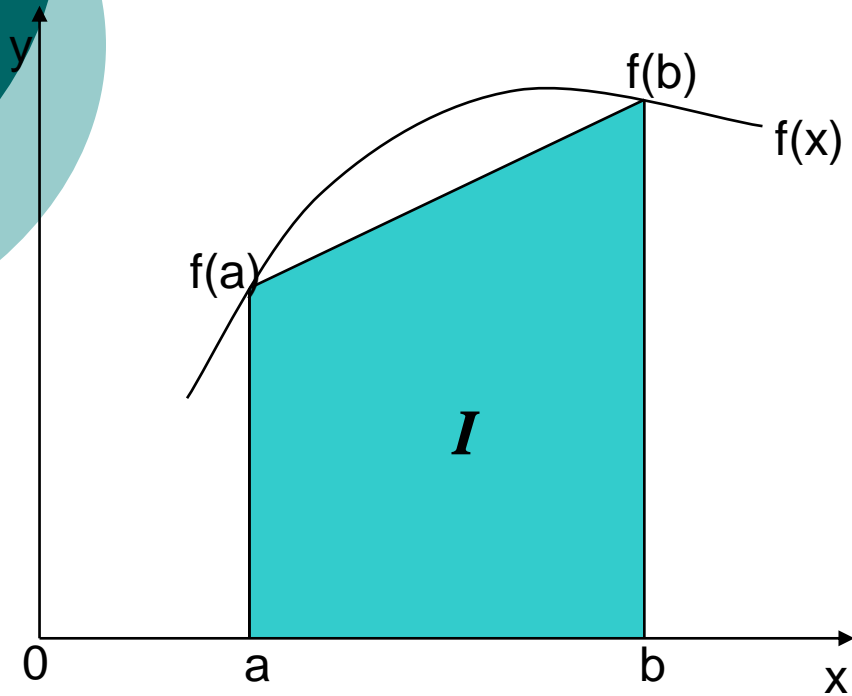
- Dengan :

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

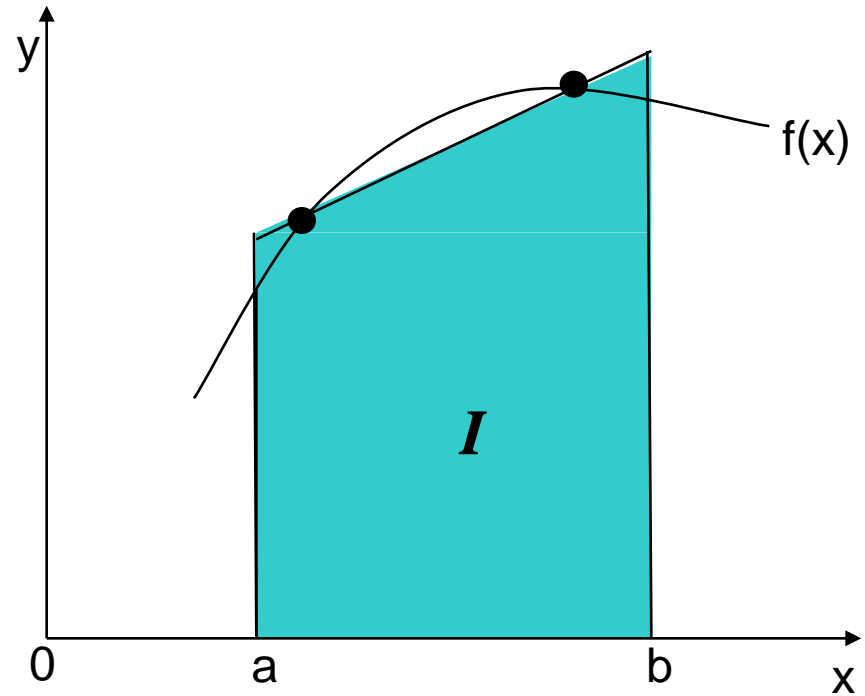
Metode Kuadratur

Trapeسيوم & Simpson	Kuadratur
<ul style="list-style-type: none">○ Yang diintegalkan berbentuk tabel atau fungsi.○ Integral didasarkan pada luasan di bawah garis lurus yang menghubungkan nilai-nilai dari fungsi pada ujung-ujung interval integrasi.	<ul style="list-style-type: none">○ Yang diintegalkan berupa fungsi.○ Integral didasarkan pada luasan di bawah garis yang menghubungkan dua titik sembarang pada kurva.

Bentuk Grafis Metode Trapesium dan Gauss Kuadratur



TRAPESIUM



GAUSS KUADRATUR