ANALISIS REGRESI

Kuliah

METODE NUMERIK

TKS 12408

Wahyu Widiyanto

Jurusan Teknik Sipil UNSOED

- Dalam analisis data sering dilakukan pembuatan suatu kurva yang dapat mewakili suatu rangkaian data yang diberikan dalam sistem koordinat x-y.

- Contoh :
  - Pengujian kuat tekan beton yang memberikan hubungan antara beban dan kuat tekan beton
  - Pengukuran debit sungai yang memberikan hubungan antara kedalaman aliran dan debit sungai.
  - Hubungan antara data hujan dan debit di sungai.
  - Pertumbuhan arus barang atau penumpang di suatu pelabuhan, terminal, stasiun, atau bandara dari tahun ke tahun.
  - Pertumbuhan jumlah penduduk sebagai fungsi waktu.
  - Hubungan antara kandungan oksigen di air dan temperatur.
  - Dsb.

Metode Kuadrat Terkecil (*Least Square Method*)

- Metode untuk mendapatkan kurva terbaik yang mewakili titik-titik data dengan cara meminimumkan perbedaan/selisih antara titik-titik data dan kurva.

Prosedur Metode Kuadrat Terkecil

- Titik-titik data digambar pada suatu sistem koordinat.
- Dipilih suatu fungsi *g(x)* yang dianggap bisa mewakili *f(x)* yang mempunyai bentuk umum berikut ini.

$$G(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_r x^r$$

- Fungsi tersebut tergantung pada parameter $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_r$
- Ditentukan parameter $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_r$ sedemikian rupa sehingga $g(x_i; a_0, a_1, \ldots\ldots, a_r)$ melalui sedekat mungkin titik-titik data. Bentuk $g(x_i; a_0, a_1, \ldots\ldots, a_r)$ mempunyai arti fungsi $g(x_i)$ dengan parameter $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_r$

- Apabila koordinat dari titik-titik percobaan adalah $M(x_i, y_i)$, dengan i = 1, 2, 3, ….. , n maka selisih ordinat antara titik-titik tersebut dengan fungsi $g(xi;\ a_0, a_1, \ldots, a_r)$ adalah :

$$E_i = M_iG_i = y_i - g(x_i;\ a_0, a_1, \ldots, a_r)$$
$$= y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3 + \ldots + a_rx_i^r)$$

- Dipilih suatu fungsi $g(x)$ yang mempunyai kesalahan E_i terkecil. Dalam metode ini jumlah kuadrat dari kesalahan adalah terkecil.

$$D^2 = \sum_{i=1}^{n} E_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i - g(x_i) \right\}^2$$

- Dicari parameter $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_r$ sedemikian sehingga D^2 adalah minimum. Nilai D^2 akan minimum apabila turunan pertamanya terhadap $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_r$ adalah nol, sehingga :

$$\frac{\partial D^2}{\partial a_0} = 0$$

$$\frac{\partial D^2}{\partial a_2} = 0$$

$$\ldots$$

$$\ldots$$

$$\frac{\partial D^2}{\partial a_r} = 0$$

- Penyelesaian dari persamaan tersebut akan memberikan hasil parameter $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_r$. Dengan demikian persamaan kurva terbaik yang mewakili titik-titik data telah diperoleh.

METODE KUADRAT TERKECIL UNTUK KURVA LINIER

- Bentuk paling sederhana dari regresi kuadrat terkecil adalah apabila kurva yang mewakili titik-titik data merupakan garis lurus, sehingga persamaan adalah :
- g(x) = a + bx
- dalam hal ini a_0 = a dan a_1 = b
- setelah melalui penjabaran diperoleh :

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$b = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^{\;2} - \left(\sum x_i\right)^2}$$

- Setelah harga koefisien a dan b diperoleh, maka fungsi g(x) dapat dicari.

Koefisien Korelasi

- Koefisien korelasi adalah suatu nilai yang dipakai untuk mengetahui derajad kesesuaian dari persamaan yang didapat.

$$\boldsymbol{r = \sqrt{\frac{D_t^{\,2} - D^2}{D_t^{\,2}}}}$$

Dengan :

$$D_t^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2 \qquad \text{dan} \qquad D^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x)^2$$

- Nilai r bervariasi antara 0 dan 1. Untuk perkiraan yang sempurna akan didapat nilai r=1. Apabila r=0 perkiraan suatu fungsi sangat jelek. Koefisien korelasi ini juga dapat digunakan untuk memilih suatu persamaan dari beberapa alternatif yang ada. Dari beberapa alternatif tersebut dipilih persamaan yang mempunyai nilai koefisien korelasi terbesar (paling mendekati 1).

Contoh

No.	x_i	y_i	$x_i\ y_i$	x_i^2
1	1	4	4	1
2	2	6	12	4
3	3	8	24	9
4	4	10	40	16
5	5	14	70	25
6	6	16	96	36
7	7	20	140	49
8	8	22	176	64
9	9	24	216	81
10	10	28	280	100
$\sum$	55	152	1058	385

$$b = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^{\;2} - \left(\sum x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{10 \cdot 1058 - 55 \cdot 152}{10 \cdot 385 - (55)^2} = 2{,}6909$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = \frac{152}{10} - 2{,}6909 \cdot \frac{55}{10} = 0{,}4$$

$$y = a + bx$$

$$\boxed{y = 0{,}4 + 2{,}6909x}$$

Koefisien Korelasi

No.	x_i	y_i	$(yi-y)^2$	$(y_i-a_0-a_1x)^2$
1	1	4	125,44	0,82645
2	2	6	84,64	0,04761
3	3	8	51,84	0,22345
4	4	10	27,04	1,35396
5	5	14	1,44	0,02117
6	6	16	0,64	0,29746
7	7	20	23,04	0,58324
8	8	22	46,24	0,00530
9	9	24	77,44	0,38205
10	10	28	163,84	0,47748
$\sum$	55	152	601,6	4,21817

$D_t^2 = 601{,}6$ $D^2 = 4{,}21817$

$$r=\sqrt{\frac{D_t^{\ 2}-D^2}{D_t^{\ 2}}}=0{,}999975$$

$$D_t^{\ 2}=\sum_{i=n}^{n}(y_i-\overline{y})^2=601{,}6$$

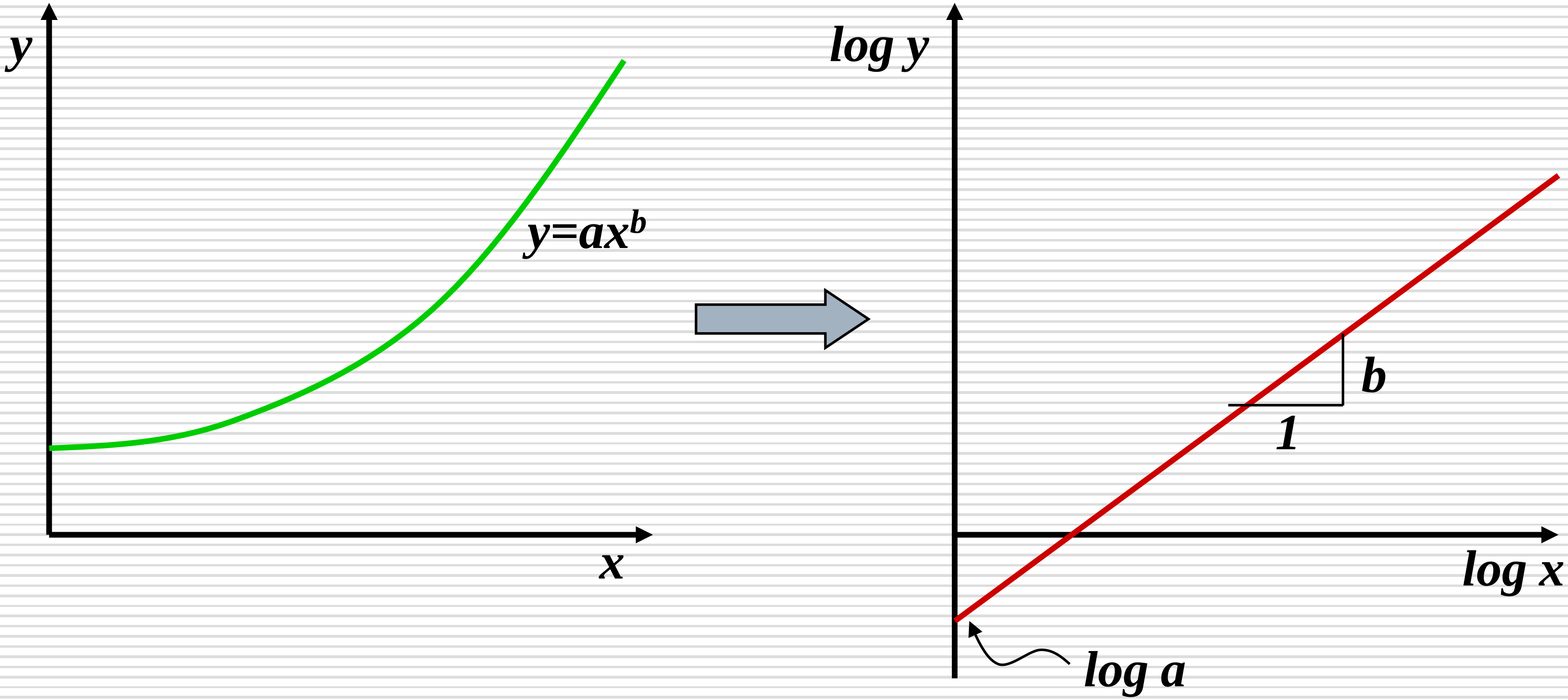
$$D^2=\sum_{i=n}^{n}(y_i-a_0-a_1x)^2=4{,}218165$$

Linierisasi Kurva Tidak Linier

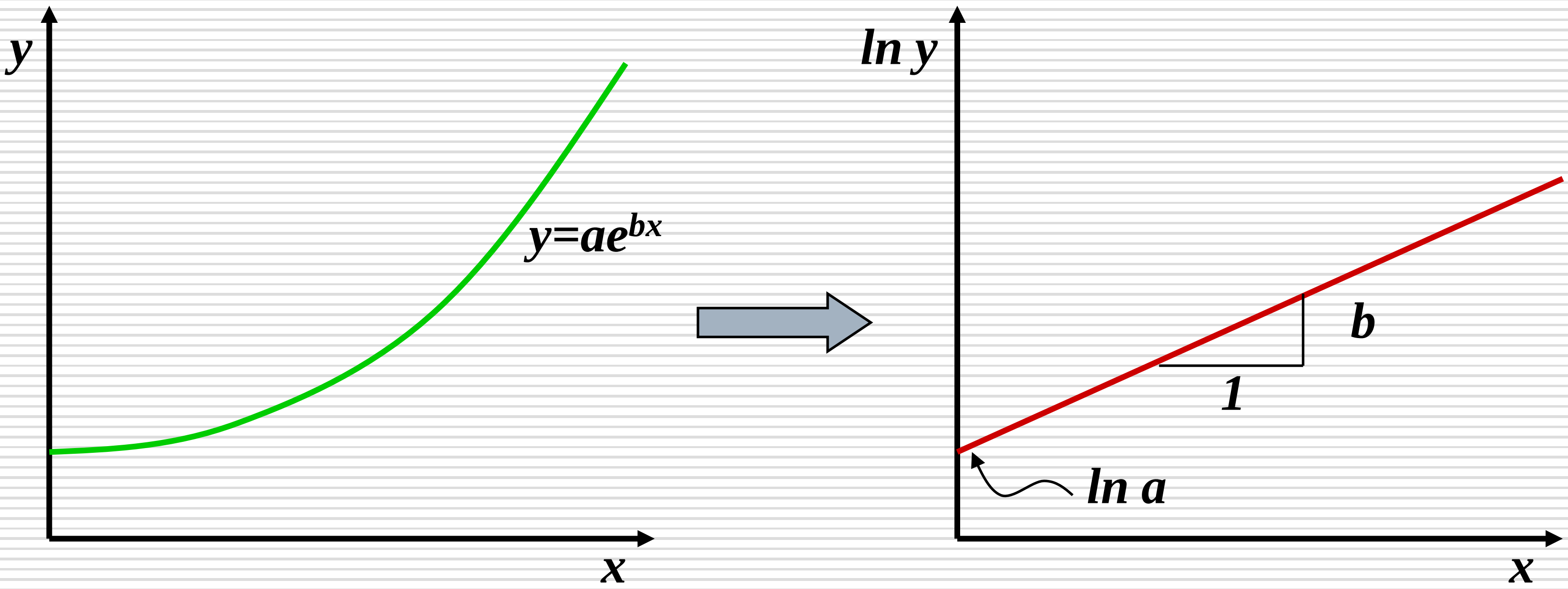
- Dalam praktek sering dijumpai bahwa sebaran titik-titik pada sistem koordinat mempunyai kecenderungan (trend) yang berupa kurva lengkung.
- Agar persamaan regresi linier dapat digunakan untuk mempresentasikan kurva lengkung maka perlu dilakukan transformasi koordinat sedemikian sehingga sebaran titik data bisa dipresentasikan dalam kurva linier.

Persamaan/Fungsi	Bentuk Fungsi	Fungsi yg Dilinierkan
Berpangkat	$y = ax^b$	$\log y = b \log x + \log a$
Eksponensial	$y = a \cdot e^{bx}$	$\ln y = \ln a + b\, x \ln e$

Transformasi Fungsi Logaritmik



Transformasi Fungsi Eksponensial



Regresi Polinomial

- Persamaan polinomial order r mempunyai bentuk :

$$y = a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_rx^r$$

$$D^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i + \ldots\ldots + a_r x_i^{\,r}) \right\}^2$$

- Selanjutnya diselesaikan dengan metode matriks hingga diketahui bilangan tak diketahui a_0, a_1, a_2, ….., a_r.
- Saat ini, regresi polinomial telah dipermudah penyelesaiannya dengan program komputer misalnya Microsoft EXCEL.

Regresi Linier dengan Banyak Variabel

- Bentuk umum :

$$y = a_o + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots + a_mx_m$$

- Koefisien $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_m$ dapat dicari dari sistem persamaan yang disusun dalam bentuk matriks.

Tugas

- Carilah kasus yang dapat dianalisis dengan regresi.
- Setiap mahasiswa harus berbeda kasus dan angkanya.
- Dikerjakan dengan Microsoft EXCEL, Dilengkapi tabel dan grafiknya.
- Dikumpulkan saat ujian UTS Metnum.

Al-Khawarizmi

Kata Aljabar diambil dari salah satu judul bukunya al-Jabr wal-Muqabala, tentang perhitungan linear dan kuadrat, bahkan kata Algoritma berasal dari penyebutan namanya sendiri, Algorizm.

Lahir dalam suasana kekhalifahan yang sangat mementingkan pendidikan, membuat Muhammad Ibnu Musa al-Khawarizmi (780-850) mendedikasikan waktunya di Bait al-Hikmah, Baghdad. Selain dijuluki sebagai bapak aljabar dan logaritma, banyak kalangan juga menyebutnya sebagai ahli matematika yang sangat berpengaruh sepanjang masa.

Pada abad ke 12, beliau telah memperkenalkan pada dunia, sistem perhitungan desimal dan penyusunan daftar logaritma dalam sebuah tabel rincian trigonometri yang memuat fungsi sinus, kosinus, tangen dan kotangen serta konsep diferensiasi. Karya Khawarizmi, *al-Jabr wal-Muqabala* digunakan sebagai buku matematika rujukan berbagai perguruan tinggi di Eropa. Riset pengukuran yang dilakukannya di Sanjar dan Palmyra berhasil menentukan ukuran dan bentuk bundaran bumi yang kemudian melahirkan peta bumi yang kita kenal sebagai *Globe*.

***"Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti."* (QS. Maryam: 94)**