SISTEM PERSAMAAN LINIER

Kuliah

METODE NUMERIK

TKS 12408

Wahyu Widiyanto

Jurusan Teknik Sipil UNSOED

PENDAHULUAN

- Tujuan : mencari n bilangan tak diketahui dari n persamaan.
- Sistem persamaan :

$$f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$$
$$\dots\dots$$
$$\dots\dots$$
$$f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$$

Akan dicari nilai $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ yang memenuhi sistem persamaan di atas.

Bentuk Umum

- **Dalam bab ini akan dipelajari sistem persamaan linier dengan bentuk umum :**

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n$$

Dengan a **adalah koefisien konstan,** n **adalah jumlah persamaan, dan** $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ **adalah bilangan tak diketahui.**

MATRIKS

- **Matriks adalah larikan bilangan yang terdiri dari baris dan kolom dengan bentuk empat persegipanjang.**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- **A adalah notasi matriks, a_{ij} adalah elemen matriks**
- **Deretan horisontal disebut baris.**
- **Deretan vertikal disebut kolom.**
- **Subskrip i menunjukkan nomor baris**
- **Subskrip j menunjukkan nomor kolom**

Bentuk Matriks

- **Matriks berdimensi m kali n (mxn) artinya matriks mempunyai m baris dan n kolom.**
- **Matriks vektor baris : matriks dengan dimensi baris m = 1.**
- **Matriks vektor kolom : matriks dengan dimensi kolom n = 1.**
- **Matriks bujursangkar : jumlah baris = jumlah kolom (m=n)**

Matriks Bujursangkar

- **Banyak digunakan dalam penyelesaian sistem persamaan linier.**
- **Dalam sistem tersebut, jumlah persamaan (=jumlah baris) dan jumlah bilangan tak diketahui (=jumlah kolom) harus sama untuk mendapatkan penyelesaian tunggal.**

Tipe Matriks Bujursangkar

1. Matriks simetris, apabila $a_{ij} = a_{ji}$.
2. Mariks diagonal : matriks bujursangkar dimana semua elemen kecuali diagonal utama adalah nol.
3. Matriks identitas : matriks diagonal dimana semua elemen pada diagonal utama adalah 1.
4. Matriks segitiga atas : matriks dimana semua elemen di bawah diagonal utama adalah nol.
5. Matriks segitiga bawah : matriks dimana semua elemen di atas diagonal utama adalah nol.
6. Matriks pita : matriks yang mempunyai elemen sama dengan nol kecuali pada satu jalur yang berpusat pada diagonal utama.

Operasi Matriks

1. Kesamaan dua matriks
2. Penjumlahan matriks
3. Perkalian matriks
4. Matriks transpose
5. Matriks inversi
6. Peningkatan matriks

SISTEM PERSAMAAN DALAM BENTUK MATRIKS

- Sistem persamaan linier dapat ditulis dalam bentuk matriks.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n$$

Persamaan di atas ditulis dalam bentuk matriks menjadi :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

Dengan :

A : matriks koefisien n x n

X : kolom vektor n x 1 dari bilangan tak diketahui

B : kolom vektor n x 1 dari konstanta

Dalam penyelesaian sistem persamaan dicari vektor kolom X berdasarkan persamaan di atas.

Metode Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

Dengan matriks:

1. **Metode Eliminasi Gauss**
2. **Metode Gauss-Jordan**
3. **Metode Sapuan Ganda Choleski**

Dengan iterasi

1. **Metode Jacobi**
2. **Metode Gauss Seidel**

1. Metode Eliminasi Gauss

- **Prosedur penyelesaian dari metode eliminasi Gauss adalah mengurangi sistem persamaan ke dalam bentuk segitiga atas sedemikian sehingga salah satu dari persamaan-persamaan tersebut hanya mengandung satu bilangan tak diketahui, dan setiap persamaan berikutnya hanya terdiri dari satu tambahan bilangan tak diketahui baru.**

Prosedur Metode Eliminasi Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b''_3 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow$$

$$x_3 = b''_3 / a''_{33}$$

$$x_2 = (b'_2 - a'_{23} x_3) / a'_{22}$$

$$x_1 = (b_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3) / a_{11}$$

2. Metode Gauss-Jordan

- **Metode Gauss-Jordan cukup mirip dengan metode eliminasi Gauss.**
- **Dalam metode Gauss-Jordan, bilangan tak diketahui dieliminasi dari semua persamaan, yang dalam metode Gauss bilangan tersebut dieliminasi dari persamaan berikutnya.**

Prosedur Metode Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b^*_1 \\ 0 & 1 & 0 & b^*_2 \\ 0 & 0 & 1 & b^*_3 \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} x_1 & & & = & b^*_1 \\ & x_2 & & = & b^*_2 \\ & & x_3 & = & b^*_3 \end{array}\right]$$

3. Matriks Tridiagonal (Metode Sapuan Ganda Choleski)

- **Suatu sistem persamaan dapat berbentuk matriks tridiagonal (matriks pita).**
- **Penyelesaian langsung dari sistem persamaan tersebut sering disebut metode sapuan ganda atau metode Choleski.**

Matriks Tridiagonal

$$\begin{bmatrix}
b_1x_1 + & c_1x_2 & & & & & = & d_1 \\
a_2x_1 + & b_2x_2 + & c_2x_3 & & & & = & d_2 \\
& a_3x_2 + & b_3x_3 + & c_3x_4 & & & = & d_3 \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & = & \bullet \\
& & a_ix_{i-1} + & b_ix_i + & c_ix_{i+1} & & = & d_i \\
& & \bullet & \bullet & \bullet & & = & \bullet \\
& & & \bullet & \bullet & & = & \bullet \\
& & & & a_nx_{n-1} + & b_nx_n & = & d_n
\end{bmatrix}$$

Penyelesaian

$$x_i = P_i x_{i+1} + Q_i$$

$$P_i = -\frac{c_i}{a_i P_{i-1} + b_i}$$

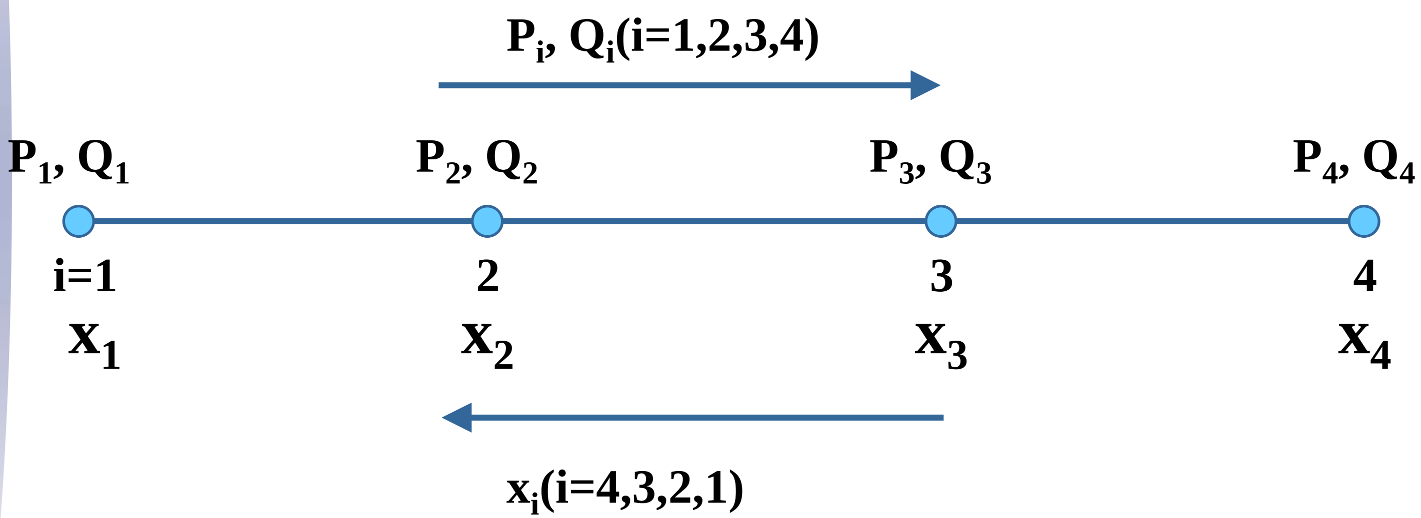
$$Q_i = \frac{d_i - a_1 Q_{i-1}}{a_i P_{i-1} + b_i}$$

Setiap bilangan tak diketahui dapat dinyatakan sebagai bilangan tak diketahui berikutnya.

Setiap bilangan tak diketahui dapat dicari dari bilangan tak diketahui berikutnya.

Skema metode sapuan ganda

Skema berikut ini adalah untuk mencari 4 bilangan tak diketahui



Metode Iterasi

- Beberapa metode yang ditampilkan sebelumnya termasuk dalam metode langsung.
- Selain secara langsung, dikenal juga metode iterasi.
- Dalam hal tertentu, metode ini lebih baik dibanding dengan metode langsung, misalnya untuk matriks yang tersebar yaitu matriks dengan banyak elemen nol.
- Metode ini juga dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan tidak linier.

Metode Iterasi

- **Metode Jacobi**
- **Metode Gauss-Seidel**

1. Metode Jacobi

Dipandang sistem 3 persamaan dengan 3 bilangan tidak diketahui :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

$$x_1 = \frac{(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)}{a_{22}}$$

$$x_3 = \frac{(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)}{a_{33}}$$

- Persamaan pertama dari sistem di atas dapat digunakan untuk menghitung x_1 sebagai fungsi dari x_2 dan x_3. demikian juga persamaan kedua dan ketiga untuk menghitung x_2 dan x_3, dan seterusnya.

- Hitungan dimulai dengan nilai perkiraan awal sebarang untuk variabel yang dicari (biasanya semua variabel diambil sama dengan nol).
- Nilai perkiraan awal tersebut disubstitusikan ke dalam ruas kanan dari sistem persamaan.
- Selanjutnya nilai variabel yang didapat tersebut disubstitusikan ke ruas kanan dari sistem lagi untuk mendapatkan nilai perkiraan kedua.
- Prosedur diulangi lagi sampai nilai setiap variabel pada iterasi ke n mendekati nilai pada iterasi ke n-1.

$$x_1^n = \frac{(b_1 - a_{12}x_2^{n-1} - a_{13}x_3^{n-1})}{a_{11}}$$

$$x_2^n = \frac{(b_2 - a_{21}x_1^{n-1} - a_{23}x_3^{n-1})}{a_{22}}$$

$$x_3^n = \frac{(b_3 - a_{31}x_1^{n-1} - a_{32}x_2^{n-1})}{a_{33}}$$

$$x_1^{n-1} \approx x_2^n$$

$$x_2^{n-1} \approx x_2^n$$

$$x_3^{n-1} \approx x_3^n$$

2. Metode Gauss-Seidel

- **Dalam metode Jacobi, nilai x_1 yang diperoleh dari persamaan pertama tidak digunakan untuk menghitung nilai x_2 dengan persamaan kedua. Demikian juga nilai x_2 tidak digunakan untuk mencari x_3, sehingga nilai-nilai tersebut tidak dimanfaatkan.**
- **Sebenarnya nilai-nilai baru tersebut lebih baik dari nilai-nilai yang lama.**
- **Dalam metode Gauss-Seidel nilai-nilai tersebut dimanfaatkan untuk menghitung variabel berikutnya.**

Metode Gauss-Seidel

$$x_1^1 = \frac{(b_1 - a_{12}x_2^0 - a_{13}x_3^0)}{a_{11}}$$

$$x_2^1 = \frac{(b_2 - a_{21}x_1^1 - a_{23}x_3^0)}{a_{22}}$$

$$x_3^1 = \frac{(b_3 - a_{31}x_1^1 - a_{32}x_2^1)}{a_{33}}$$

Johann Carl Friedrich Gauß (juga dieja Gauss) (lahir di Braunschweig, 30 April 1777 – wafat di Göttingen, 23 Februari 1855 pada umur 77 tahun) adalah matematikawan, astronom, dan fisikawan Jerman yang memberikan beragam kontribusi; ia dipandang sebagai salah satu matematikawan terbesar sepanjang masa selain Archimedes dan Isaac Newton. Dilahirkan di Braunschweig, Jerman, saat umurnya belum genap 3 tahun, ia telah mampu mengoreksi kesalahan daftar gaji tukang batu ayahnya.

Menurut sebuah cerita, pada umur 10 tahun, ia membuat gurunya terkagum-kagum dengan memberikan rumus untuk menghitung jumlah suatu deret aritmatika berupa penghitungan deret 1+2+3+...+100. Meski cerita ini hampir sepenuhnya benar, soal yang diberikan gurunya sebenarnya lebih sulit dari itu.