AKAR-AKAR PERSAMAAN

KULIAH METODE NUMERIK
TKS12408

Wahyu Widiyanto
Jurusan Teknik Sipil UNSOED

Isaac Newton

Lahir pada keluarga petani Inggris.

Bosan sekolah, lebih senang membuat layang2, roda air, jam dan perkakas lain.

Menemukan teorema binomial, elemen dari kalkulus diferensial maupun integral, teori warna-warna, hukum gravitasi newton.

Lagrange : Ia jenius terbesar yang paling mujur.

Meninggal sebagai seorang terhormat pada usia 85 dan dimakamkan dengan kebesaran bangsanya di Westminter Abbey.

Saya tidak tahu bagaimana saya tampak pada dunia; tetapi bagi saya sendiri saya nampaknya hanyalah seperti seorang anak laki-laki yang bermain-main di pantai dan mengalihkan diri sendiri sekarang dan kemudian menemukan koral yang lebih halus atau kerang yang lebih indah daripada biasanya, sementara samudera besar dari kebenaran semuanya terbentang di hadapan saya tak terungkapkan.

Isaac Newton

Persamaan Kuadrat

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Akar-akarnya dapat dicari secara analitis dengan rumus ABC sbb :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Akar-akar tersebut memberikan nilai-nilai x yang menjadikan persamaan itu sama dengan nol.

Persamaan dg Derajad Lebih Tinggi

- Untuk persamaan polinomial derajad 3 atau 4, rumus yg ada sangat kompleks & jarang digunakan.
- Untuk persamaan derajad lebih tinggi tidak ada rumus untuk menyelesaikannya.
- Contoh :

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 10 = 0$$

$$f(x) = 5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 10 = 0$$

$$f(x) = e^x + 4 = 0$$

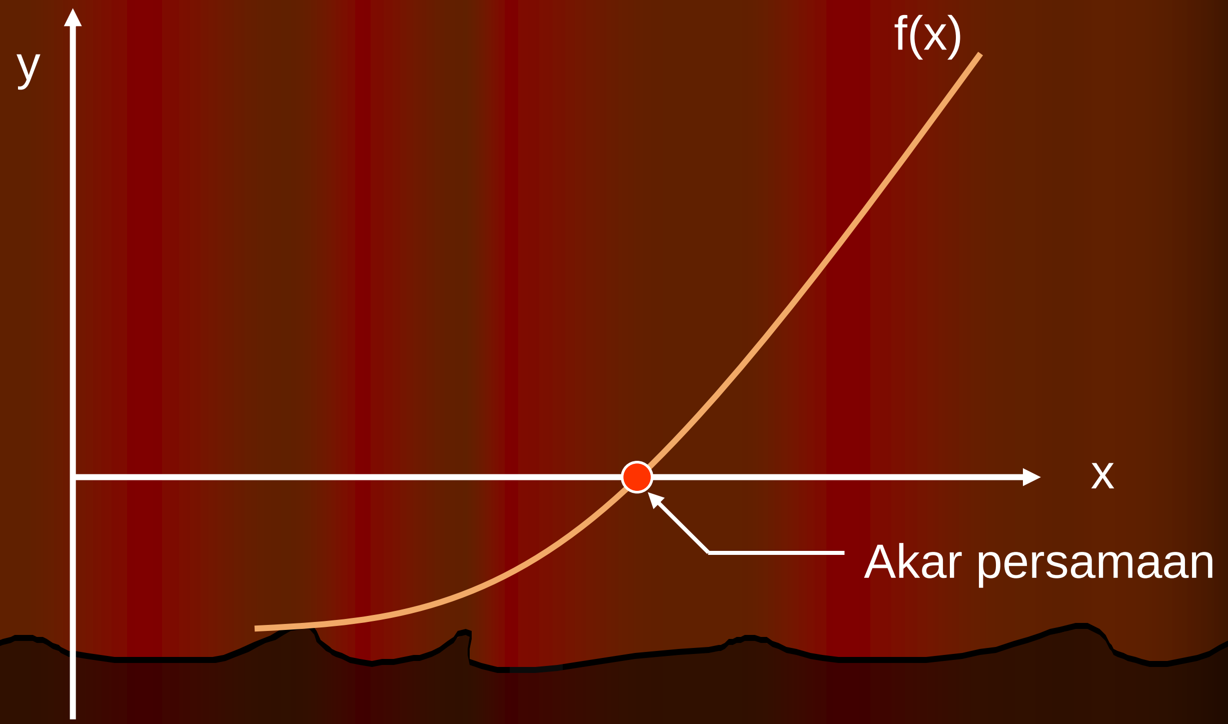
$$f(x) = 3x + \sin x - e^x = 0$$

Metode Penyelesaian

- Metode Grafik
- Metode Setengah Interval
- Metode Interpolasi Linier
- Metode Newton Raphson
- Metode Secant
- Metode Iterasi
- Metode Muller
- Metode Bairstow

1. Metode Grafik

- Menggambarkan fungsi pada grafik dan mencari titik potongnya dengan sumbu x.
- Titik potong dengan sumbu x adalah akar dari persamaan/fungsi tersebut.
- Hasilnya relatif kasar.

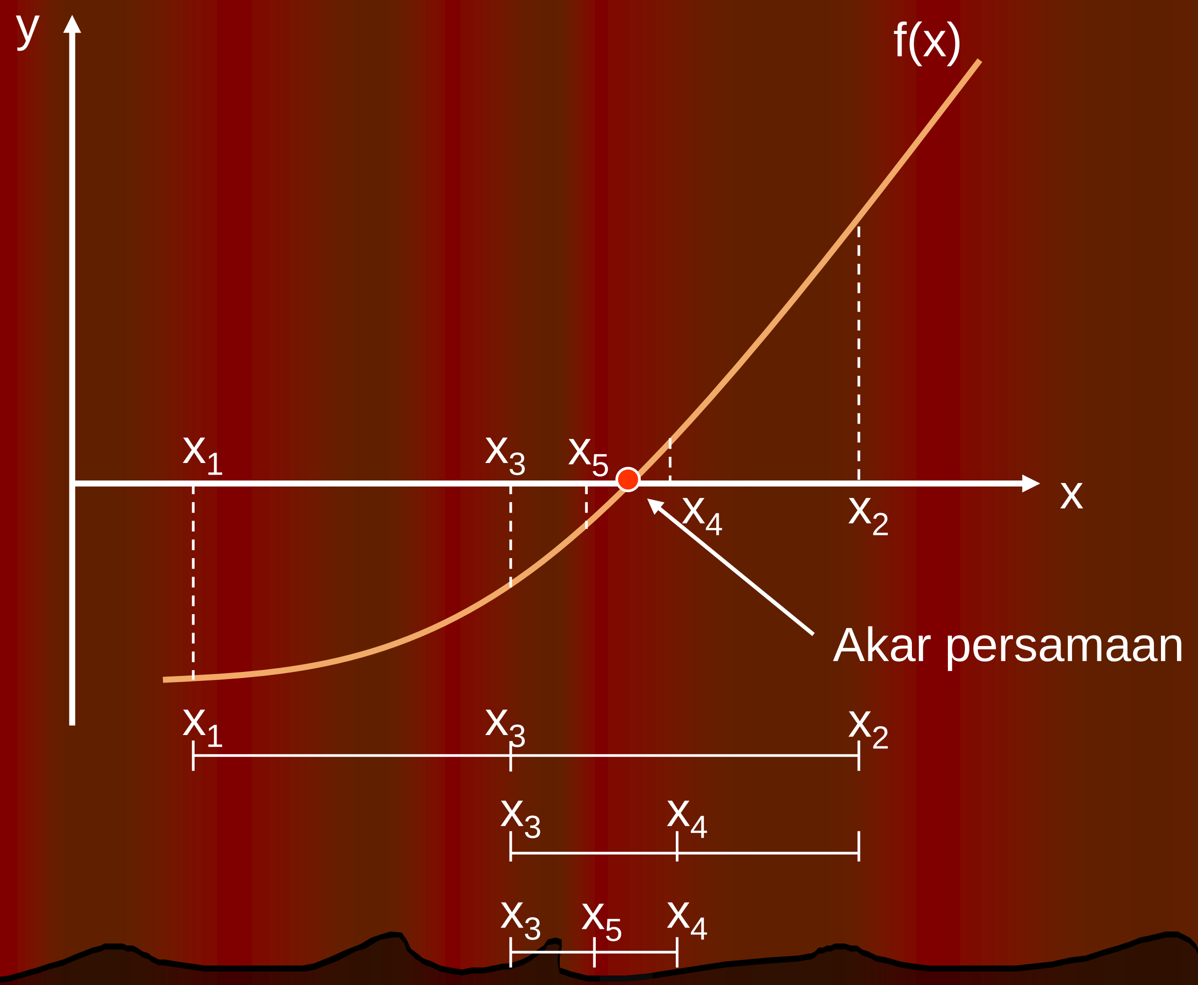


2. Metode Setengah Interval

- Merupakan bentuk paling sederhana dari penyelesaian persamaan (mencari suatu akar persamaan)

- Dalam metode ini, sebelumnya “ditebak” dua nilai x yg BERBEDA TANDA apabila dimasukkan dalam persamaan, kemudian dicari nilai tengah berulangkali dari dua nilai x hingga diperoleh f(x) sama dengan atau mendekati nol.

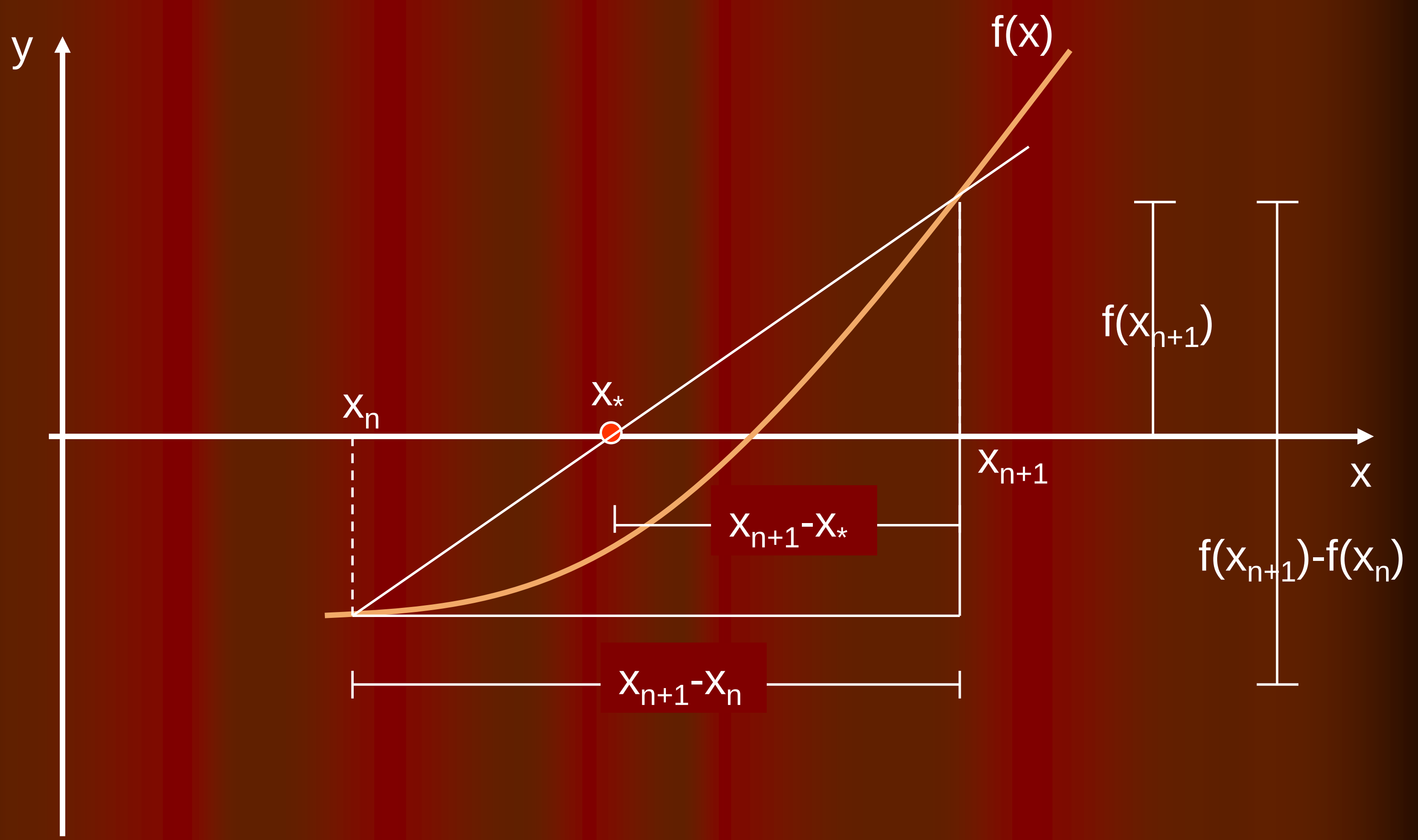
Gambaran Grafis Metode Setengah Interval



3. Metode Interpolasi Linier

- Metode ini dapat menjadikan langkah-langkah hitungan menjadi lebih efisien dibandingkan dengan metode setengah interval.
- Metode interpolasi linier didasarkan pada interpolasi antara dua nilai dari fungsi yang mempunyai tanda berlawanan.
- Nilai perkiraan akar yang baru diperoleh dengan interpolasi yang menggunakan sifat segitiga sebangun.

Gambaran Grafis Metode Interpolasi Linier



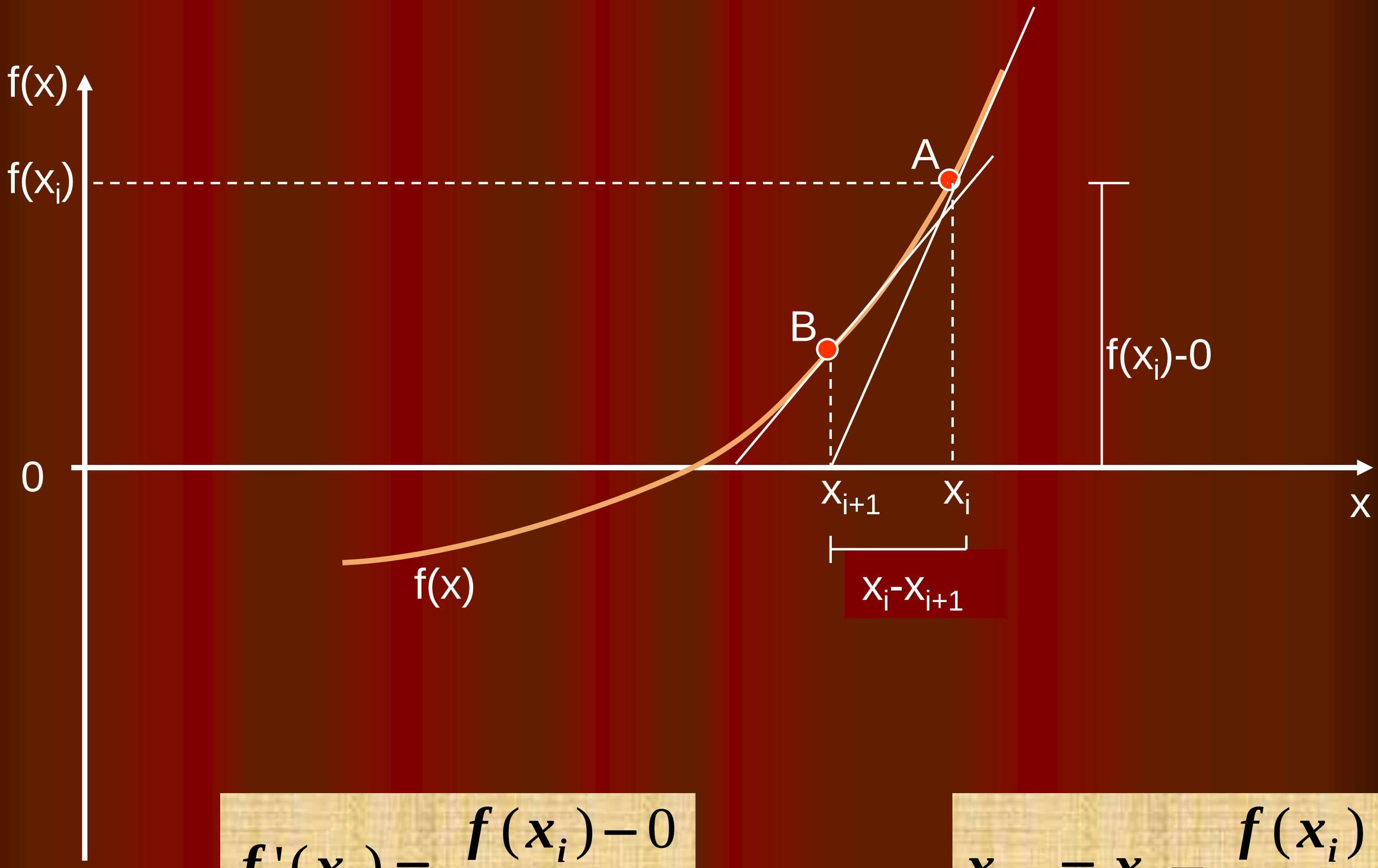
$$\frac{x_{n+1}-x_*}{x_{n+1}-x_n}=\frac{f(x_{n+1})}{f(x_{n+1})-f(x_n)}$$

$$x_* = x_{n+1}-\frac{f(x_{n+1})}{f(x_{n+1})-f(x_n)}(x_{n+1}-x_n)$$

4. Metode Newton-Raphson

- Metode ini paling banyak digunakan dalam mencari akar-akar persamaan.
- Jika perkiraan awal dari akar adalah xi, suatu garis singgung dapat dibuat dari titik (xi, f(xi)). Titik di mana garis singgung tersebut memotong sumbu x biasanya memberikan perkiraan yang lebih dekat dari nilai akar.

Gambaran Grafis Metode Newton-Raphson



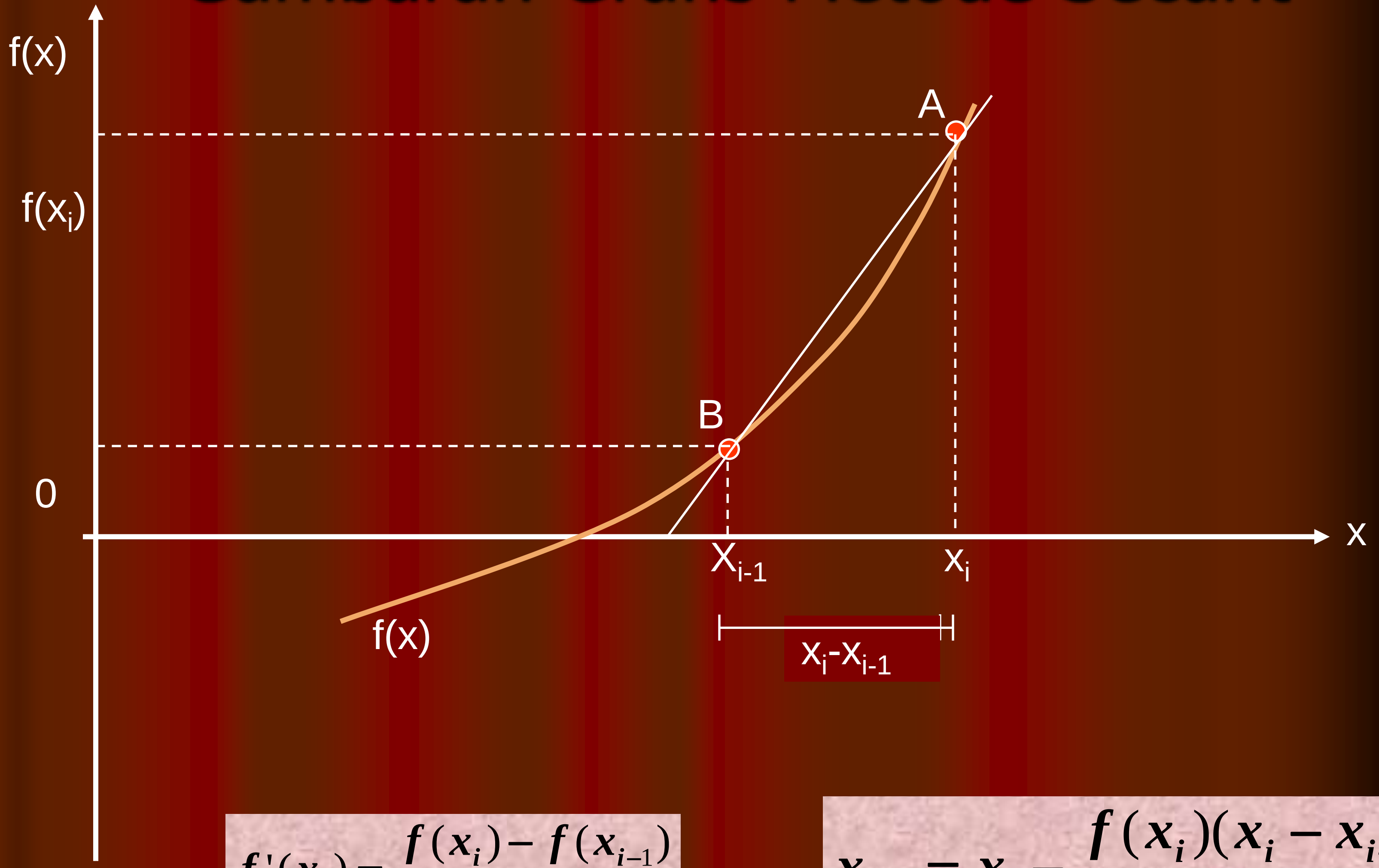
$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - (x_{i+1})}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

5. Metode Secant

- Kekurangan metode Newton-Raphson adalah diperlukannya turunan pertama (diferensial) dari f(x) dalam hitungan. Kadang-kadang sulit untuk mencari turunan dari persamaan yang diselesaikan.
- Untuk itu maka bentuk diferensial didekati dengan nilai perkiraan berdasarkan diferensial beda hingga.

Gambaran Grafis Metode Secant



$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - (x_{i-1})}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

6. Metode Iterasi

- Untuk mencari akar dari f(x) = 0
- Digunakan suatu persamaan hingga parameter x berada di sebelah kiri persamaan

$$x = g(x)$$

- Contoh :

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$

Dapat ditulis

$$x = \frac{x^3 + x^2 - 3}{3}$$

Dengan memberi nilai awal dari akar x_i
dapat dihitung perkiraan baru x_{i+1}
dengan rumus iteratif berikut :

$$x_{i+1} = g(x_i)$$